Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Nov., WS 2008/09
Abgabe: 5. Dez. bis 10 Uhr

Analysis I

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1: Innnen von innen ist innen – zur Menge der inneren Punkte.
Es sei V ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $M \subset V$ sei die Menge der inneren Punkte erklärt durch $M^\circ := \{x \in M \mid x \text{ ist innerer Punkt von } M\}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Für alle Teilmengen $M \subset V$ gilt $\big(M^\circ\big)^\circ = M^\circ$.

b) Eine Teilmenge $M \subset V$ ist genau dann offen, wenn $M^\circ = M$ gilt.

Damit genügt also die Abbildung $F \colon \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$, $M \mapsto M^\circ$ der Gleichung $F^2 = F$, und die offenen Mengen sind genau diejenigen Mengen M mit $F(M) = M$.

Aufgabe 6.2: $\liminf, \limsup$**: Wenn Folgen nicht wissen, wohin sie wollen ...**
Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen mit $a_n \le b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$,

b) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \le \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

Bestimmen Sie $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

c) $a_n := \mathrm{Re}\big(i^n(1+\frac{1}{n})\big)$,

d) $a_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k+(-1)^n}{k!}$.

Aufgabe 6.3: Weder offen noch geschlossen – aber dicht!
Gegeben sei die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{2^n} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ und ein } n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

a) Weder M noch $\mathbb{R} \setminus M$ sind offen in $\mathbb{R}$.

b) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge mit $A \subset M$, so ist $A = \emptyset$.

c) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine abgeschlossene Menge mit $M \subset A$, so ist $A = \mathbb{R}$.

Sonderaufgabe: Aus aktuellem Anlass!

a) Analysis und Lineare Algebra sind keineswegs zwei “Säulen der Mathematik”, die einfach nur nebeneinander stehen, als ob sie nichts miteinander zu tun hätten. Formulieren Sie daher einmal möglichst viele Aussagen über (konvergente) Folgen in der Sprache der (Linearen) Algebra.

b) Reflektieren Sie nochmals Aufgabe 4.3 a). Worin besteht das “Überraschungsmoment” der behaupteten Aussage? Läßt sich die Aussage auch im Sinne der Linearen Algebra interpretieren? Gilt die Behauptung auch, wenn man statt $(2x_{n+1} - x_n)_n$ die Folge $(x_{n+1} + x_n)_n$ betrachtet?

Bemerkung: Sie brauchen diese Aufgabe nicht schriftlich zu bearbeiten, sollten sich aber insoweit ernsthafte Gedanken machen, daß diese Aufgabe in der Übungsstunde sinnvoll diskutiert werden kann. Nachdenken und Hinterfragen lohnt sich: Es geht um den tieferen Sinn der Aufgaben und interessante Querverbindungen! Vielleicht macht dann das Bearbeiten der Aufgaben (noch) mehr Spaß ;)

Haben Sie es schon bemerkt? Neben den Aufgabenblättern finden Sie auf der Übungshomepage auch noch die sogenannten “Fallgruben” zum Herunterladen. Dabei handelt es sich um ein *erstmaliges* Angebot mit *einmaligen* “Lernchancen” , deren Sinn vor allem im exemplarischen Vergleich von falschen (oder vielleicht besser gesagt fast richtigen) und richtigen Lösungen, bzw. in der Gegenüberstellung von alternativen (kurzen, eleganten oder elementaren, kleinschrittigen) Lösungswegen und anderen nützlichen Tips und Hinweisen besteht. Damit wir Sie beim Lernen noch besser unterstützen können, müssen Sie uns darauf hinweisen, wo der Schuh am meisten drückt. Geben Sie daher Ihren Übungsgruppenleitern gezielt Feedback und Anregungen, damit diese beim Erstellen der Fallgruben ausreichend "inspiriert" sind und sich nicht etwas aus den Fingern saugen müssen, was möglicherweise nicht von Relevanz für Sie ist. Eines sei jedoch bewußt klargestellt: es ist keine Sammlung von sogenannten Musterlösungen beabsichtigt. Niemand klettert eine Strickleiter hoch, bloß weil sie ihm hingehalten wird. Wer jedoch in eine Fallgrube fällt, wird wohl eine Strickleiter gern in Anspruch nehmen, um wieder hochzukrabbeln. Das trainiert!