Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. R. Denk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 12. Dez., WS 2008/09
Abgabe: 19. Dez. bis 10 Uhr

Analysis I

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1: Charakterisierung der Stetigkeit

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Beweisen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

i) f ist stetig.

ii) Für alle offenen Mengen $O \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(O)$ offen.

iii) Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

Aufgabe 7.2: Zur Hölder-Stetigkeit

Es seien $\alpha > 0$ und $C \geq 0$ zwei Konstanten. Ferner sei $S \subset \mathbb{R}$ (ein Intervall) und $f\colon S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche für alle $x, y \in S$ der Beziehung

$$\big|f(y) - f(x)\big| \leq C|y - x|^\alpha$$

genügt. Beweisen Sie:

a) f ist gleichmäßig stetig.

b) f ist auf jeder beschränkten Menge beschränkt.

c) f ist konstant, falls $\alpha > 1$. Folgern Sie dazu, daß f Lipschitz-stetig ist, wobei die Lipschitz-Konstante beliebig klein wählbar ist.

Aufgabe 7.3: Eine nicht gleichmäßig konvergierende Funktionenfolge

Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n := \frac{|x|^n}{1 + |x|^n}$$

definiert. Welche Funktion ergibt sich im Grenzwert? Zeigen Sie ferner:

a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig.

b) Allerdings konvergiert die Funktionenfolge für jede feste Zahl $q > 1$ gleichmäßig auf der Menge

$$\{x :\ |x| \geq q\} \cup \{x :\ |x| \leq q^{-1}\}.$$

Aufgabe 7.4: Aus aktuellem Anlaß **(insbesondere für Gruppe 7)**

a) Bekanntlich kommen die irrationalen Zahlen bei der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ins Spiel. Salopp gesprochen ergeben sich die irrationalen Zahlen als Grenzwerte von Cauchyfolgen rationaler Zahlen, welche in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzen. Per Konstruktion wird jede irrationale Zahl beliebig gut durch rationale Zahlen approximiert, so daß die Menge der irrationalen Zahlen keine inneren Punkte enthält (denn jede noch so kleine Umgebung einer irrationalen Zahl enthält eine rationale Zahl). Warum enthält auch $\mathbb{Q}$, die Menge der rationalen Zahlen, keine inneren Punkte? Zeigen Sie, daß sich zwischen zwei rationalen Zahlen stets eine irrationale Zahl finden läßt. Denken Sie daran, daß $\sqrt{2}$ irrational ist.

b) Zeigen Sie, daß die Basis der Exponetialfunktion e *irrational* ist. Leiten Sie dazu zunächst eine sinnvolle Fehlerabschätzung E_n für die Exponentialreihe her, so daß gilt $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \mathrm{e} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + E_n$ und $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$. Führen Sie sodann die Annahme, e sei rational, zum Widerspruch.