Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 1 (Sylvia Lange)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Alternative Lösung

zur Aufgabe 2

Aufgabe: Seien X, X' Mengen und $f : X \to X'$ ein Abbildung. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f injektiv

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$

c) $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$

Beweis:

Wir zeigen die Äquivalenz der Aussagen durch Ringschluss:

$a) \Rightarrow b)$:

Seien f injektiv und $A, B \subset X$ beliebig.
Die Inklusion $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ gilt für alle Abbildungen f.
Angenommen es gelte $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
Dann gibt es ein $y \in f(A) \cap f(B)$ mit $y \notin f(A \cap B)$.
Da y in $f(A)$ liegt, gibt es ein $x_1 \in A$ mit $f(x_1) = y$ und ebenso, da $y \in f(B)$, gibt es ein $x_2 \in B$ mit $f(x_2) = y$.
Aufgrund der Injektivität von f folgt damit: $x_1 = x_2$, also $x_1, x_2 \in A \cap B$.
Das heißt aber: $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(A \cap B)$. Widerspruch.

$b) \Rightarrow c)$:

Es gelte $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.
Die Inklusion $f(A) \backslash f(B) \subseteq f(A \backslash B)$ gilt für alle Abbildungen f.
Angenommen es gelte $f(A) \backslash f(B) \subset f(A \backslash B)$.
Dann gibt es ein $y \in f(A \backslash B)$ mit $y \notin f(A) \backslash f(B)$.
Wir schreiben: $f(A) \backslash f(B) = f(A) \cap (f(B))^C$ und $f(A \backslash B) = f(A \cap B^C) = f(A) \cap f(B^C)$, wobei in der letzten Gleichung unsere Voraussetzung eingeht.
Das heißt: Es gibt ein $y \in f(A) \cap f(B^C)$ mit $y \notin f(A) \cap (f(B))^C$.
Da also $y \in f(A)$, aber $y \notin f(A) \cap (f(B))^C$, muss $y \in f(B)$ gelten.
Wir erhalten demnach ein y, das sowohl in $f(B)$ als auch in $f(B^C)$ liegt, also $y \in f(B) \cap f(B^C)$ und damit nach Voraussetzung $y \in f(B \cap B^C) = \emptyset$. Widerspruch.

$c) \Rightarrow a)$:

Es gelte $f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.
Angenommen f nicht injektiv.
Dann gibt es $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = y = f(x_2)$.
Seien $A := \{x_1\}, B := \{x_2\}$.
Damit gilt: $A \backslash B = A = \{x_1\}$, aber $\{y\} = f(A) = f(A \backslash B) = f(A) \backslash f(B) = \emptyset$. Widerspruch.

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 1.1

Wo steckt der Fehler?

Neben den zu erwartenden formalen Schwierigkeiten, gab es eine gehäuft auftretende Ungenauigkeit und einen bedenkenswerten Fehler.

Beides findet sich in Aufgabe 1.1a eines Studenten:

Vorraussetzung: Es seien X, X' Mengen, $A, B \subset X$, $f : X \to X'$ eine Abbildung.
Behauptung: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Beweis: Sei $y \in f(A \cap B)$
$\Leftrightarrow \exists x \in A \cap B : y = f(x)$
$\Leftrightarrow \exists x : (x \in A \wedge y = f(x)) \wedge (x \in B \wedge y = f(x))$
$\Leftrightarrow (y \in f(A)) \wedge (y \in f(B))$
$\Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$
q.e.d.

Zunächst das offensichtliche Problem: Es wird nicht die Behauptung gezeigt, sondern $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Den Nachweis, dass das im allgemeinen nicht gilt, hat der Student mit einem Gegenbeispiel selbst gebracht!
Das Problem bei der Rückrichtung liegt darin, dass man aus

$$(y \in f(A)) \wedge (y \in f(B))$$

nur folgern kann:

$$\exists x_1, x_2 \in X : (x_1 \in A \wedge y = f(x_1)) \wedge (x_2 \in B \wedge y = f(x_2))$$

Zwei verschiedene Elemente aus X können durchaus denselben Wert in X' annehmen! Um nun aber

$$\exists x \in A \cap B : y = f(x))$$

zu erhalten, muss $x_1 = x_2$ sein, d.h. die Funktion muss injektiv sein.

Betrachten wir nun den Beweis ohne die Rückrichtung.
Der korrigierte Beweis scheint jetzt die Behauptung zu zeigen - doch wo ist die Ungenauigkeit?
Das Problem liegt in der ersten Zeile: Sei $y \in f(A \cap B)$. Die Existenz eines solchen y ist nicht gesichert, es kann $A \cap B = \emptyset$ gelten (falls X mehr als ein Element enthält). Eine kurze Rechnung (mit $f(\emptyset) = \emptyset$) liefert natürlich, dass die Behauptung weiterhin gilt - man sollte sich aber dennoch so früh wie möglich daran gewöhnen, auch solche Details zu beachten.

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 7 (Martin Rheinländer)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” zur Aufgabe 1.1a

Notationsschwierigkeiten

Voraussetzung: Seien X, X' Mengen und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Ferner seien $A, B \subset X$ und $A', B' \subset X'$ Teilmengen.
Behauptung: Es gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Beweis: Sei $y \in f(A \cap B)$. Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap B) &\iff \exists x(x \in A \cap B \text{ mit } y = f(x)) \\ &\iff \exists x(x \in A \wedge x \in B \wedge y = f(x)) \\ &\iff (\exists x(x \in A \wedge y = f(x)) \wedge (\exists x(x \in B \wedge y = f(x))) \\ &\iff y \in f(A) \wedge y \in f(B) \iff y \in f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

$\square$

Die falsche Verwendung des $\exists$-Zeichens ist ein typischer „Anfängerfehler“. Ausserdem msste auch in jedem Schritt die Äquivalenz geprüft werden, die hier nicht erfllt ist. Zuerst jedoch ein formal richtiger Beweis.

Beweis: Sei $y \in f(A \cap B)$. Nun gilt aber:

$$y \in f(A \cap B) \iff \exists x \in A \cap B \text{ mit } y = f(x)$$

Des weiteren stellen wir fest: $x \in A \cap B \iff x \in A$ und $x \in B$. Wegen $y = f(x)$ folgt somit $y \in f(A)$ und $y \in f(B)$. Insgesamt erhalten wir

$$y \in f(A) \cap f(B).$$

Dies impliziert $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, da wir fr ein beliebiges $y \in f(A \cap B)$ gezeigt haben $y \in f(A) \cap f(B)$. Somit ist die Behauptung gezeigt.

Diskussion: Im Beweis des Teilnehmers (erster Beweis) wird durch unsaubere Notation suggeriert, dass die gefolgerten Elemente aus A und B die selben sind. Das Problem liegt in folgendem Schritt:

$$y \in f(A) \text{ und } y \in f(B) \to \exists x \in A \text{ mit } y = f(x) \text{ und } \exists x \in B \text{ mit } y(f(x).$$

Es ist aber nicht geklärt, dass jenes $x \in A$ mit dem $x \in B$ übereinstimmt. (Dies wäre nur unter der zusätzlichen Annahme der Injektivität von f der Fall). Korrekt notiert würde der Fehler wohl eher auffallen:

$$y \in f(A) \text{ und } y \in f(B) \to \exists a \in A \text{ mit } y = f(a) \text{ und } \exists b \in B \text{ mit } y = f(b).$$

Auserdem war auch keine Äquivalenz zu zeigen, da dies ohnehin ein sinnloses unterfangen dargestellt hätte.

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 6 (Jan Weber)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 1.1 (a)

Wo steckt der Fehler?

Diese Ausführung nimmt Bezug auf Aufgabe 1.1 (a) (Analysis I WS08/09). Es sollte für eine Abbildung $f : X \to X'$ zwischen Mengen X und X' und Teilmengen A, B von X, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ gezeigt werden. Gilt auch schon die Gleichheit?

Folgen wir nun den Ausführungen eines Übungsteilnehmers.

Behauptung: Es seien $X,\ X'$ Mengen und $f : X \to X'$ eine Abbildung. Ferner seien $A,\ B \subset X$ Teilmengen. Es gilt: $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$, es gilt auch die Gleichheit.

Beweis:

$$\begin{aligned} \textit{Sei } x' \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists\ x\ (x \in A \cap B \wedge x' = f(x)) && (1)\\ &\Leftrightarrow \exists\ x\ (x \in A \wedge x \in B \wedge x' = f(x)) && (2)\\ &\Leftrightarrow \exists\ x\ ((x \in A \wedge x' = f(x)) \wedge (x \in B \wedge x' = f(x))) && (3)\\ &\Leftrightarrow x' \in f(A) \wedge x' \in f(B) && (4)\\ &\Leftrightarrow x' \in f(A) \cap f(B) && (5) \end{aligned}$$

Q.e.d.

Nun sieht der Beweis auf den ersten Blick recht schlüssig aus, wo also scheitert er? Der Fehler liegt zwischen Aussage (3) und Aussage (4), es gilt hier keine Äquivalenz. Genauer gilt nicht (4) $\Rightarrow$ (3), da zwar folgt:

$$(\exists\ x \in A \wedge x' = f(x)) \wedge (\exists\ y \in B \wedge x' = f(y))$$

Dies ist aber bei nicht injektiver Funktion f nicht mit (3) äquivalent, denn x und y können dann verschieden sein.

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 11 (Felix Kleber)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” Aufgabe 1.1

Wo steckt der Fehler?

Zu Aufgabe 1.1 b): Hier wurde des öfteren die falsche Richtung gezeigt.

Behauptung: $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
y \in f(A \setminus B) &\Leftrightarrow \exists x(x \in (A \setminus B) \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \notin B \wedge y = f(x)) \\
&\Rightarrow \exists x(x \in A \wedge y = f(x)) \wedge \exists x(x \notin B \wedge y = f(x)) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \\
&\Leftrightarrow y \in f(A) \setminus f(B).
\end{aligned}$$

Hier macht die dritte Zeile keinen Sinn.

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 1.3 a)

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 1.3 a)
Gegeben seien Mengen A, B, C sowie bijektive Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$.
Zeigen Sie, dass dann die Abbildung $g \circ f : A \to C$ ebenfalls bijektiv ist.

Beweis:
1. injektiv
Sei $x_1, x_2 \in A$ mit $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$
Da g bijektiv, also insbesondere injektiv ist, folgt $f(x_1) = f(x_2)$. Da f ebenfalls bijektiv, also insbesondere injektiv, folgt $x_1 = x_2$ und somit die Injektivität von $g \circ f$

2. surjektiv
Da f bijektiv ist, gilt dass die Kardinalität von A gleich der von B ist. Das heißt $|A| = |B|$. Dasselbe gilt für g, so dass $|B| = |C|$ folgt. Insgesamt erhält man also $|A| = |C|$. Hieraus folgt zusammen mit der oben bewiesenen Tatsache, dass $g \circ f$ als Abbildung von A nach C injektiv ist, dass $g \circ f$ surjektiv sein muss.

Wo liegt nun der Fehler?

Lösung
Das Problem liegt im letzten Schluss. Für endliche Mengen ist dieser Schluss richtig. Deshalb erscheint er uns wahrscheinlich zunächst auch als logisch, da bijektiv ja intuitiv irgendwas mit der Anzahl der Elemente zu tun hat.
Das dies jedoch nicht allgemein gelten kann, wird hier mit einem Gegenbeispiel gezeigt.
Betrachten wir z.B. die unendlichen Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$. Dann haben beide Mengen dieselbe Kardinalität (beide sind abzählbar). Dennoch können wir die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

definieren, die offensichtlich injektiv ist, aber nicht surjektiv.

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 13 (Christoph Litschka)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 1.2

Wo steckt der Fehler?

Im Zuge der Aufgabe 1.2, ergab sich folgende Teilaufgabe:

Vor.: Seien X, X' Mengen und $f : X \to X'$ eine Abbildung.

Beh.: Es gilt: $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$
$\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$

Bew.: In Aufgabe 1.1. a) wurde bereits $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$ gezeigt.
Bleibt also noch $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ zu zeigen.
Sei hierfrür

$$
\begin{aligned}
& y \in f(A \setminus B) && (1)\\
\Rightarrow\ & \exists x \in A \setminus B : f(x) = y && (2)\\
\Rightarrow\ & x \in A \wedge x \notin B && (3)\\
\Rightarrow\ & f(x) \in f(A) \wedge f(x) \notin f(B) && (4)\\
\Rightarrow\ & y = f(x) \in f(A) \setminus f(B) && (5)
\end{aligned}
$$

Bei einer oberflälichen Betrachtung, könnte man diesen Beweis als richtig abharken. Jedoch fällt schnell auf, dass im Beweis die Eigenschafft $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ nicht verwendet wurde. Damit wird hier $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für eine beliebiges f gezeigt. Das dies jedoch nicht richtig sein kann, sieht man bereits an dem Beispiel $f(x) = x^2$. Doch wo steckt der Fehler?

Aufgrund der Definition von $f(A) := \{y \in X' | \exists x \in A : f(x) = y\}$ gilt:
$x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$ oder die Kontraposition: $f(x) \notin f(A) \Rightarrow x \notin A$.

Jedoch ist es nicht möglich, $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$ zu folgern. Denn es gilt $(A \Rightarrow B) \not\Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B)$. Dies wird aber von Zeile (3) zu Zeile (4) gmacht.