Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 1 (Sylvia Lange)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

zur Aufgabe 2.2 vi)

Aufgabe: Beweisen Sie die folgende Ungleichung füer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

"Beweis":

$d > c \Rightarrow b + d > c$
$\Rightarrow b + d + (-c) > a$
$\Rightarrow b + d + (-c) > a + 0$
$\Rightarrow b + d + (-c) > a + c + (-c)$
$\Rightarrow b + d > a + c$ $\square$

Diskussion:
Obwohl der Beweis am Ende mit der Behauptung endet, liegt schon in der 1. Zeile (einer) der Fehler: Aus $d > c$ folgt nicht $b + d > c$. Das gilt nur, wenn $b > c - d$ gilt. Wahrscheinlich wurde angenommen, dass $b > 0$ ist.
Bei der Folgerung aus der ersten zur zweiten Zeile geht der Beweisführende davon aus, dass $a \leq 0$ ist, was ebenfalls nicht vorausgesetzt ist.

Und was lernen wir daraus?
$a < b$ bedeutet NICHT $a < 0$ und $b > 0$!

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” zur Aufgabe 1.1a

Notationsschwierigkeiten

Voraussetzung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$.
Behauptung: Es gilt $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$

Beweis:

Fall 1 , $a > 0, b > 0$: Aus $a > 0, b > 0$ folgt: $|a| + |b| = a + b$ und $|a+b| = a+b$. Nehmen wir nun die zu zeigende Gleichung her und setzen unser Wissen ein, so erhalten wir: $0 \leq |a-b|$. Dies ist offenbar wahr, da Beträge immer grösser oder gleich Null sind. Also folgt eine wahre Aussage womit auch unsere Behauptung wahr ist.

Fall 2 , $a < 0, b < 0$: Hier können wir $|a| + |b| = -a - b$ und $|a+b| = -a-b$ schliessen. Durch einsetzen bekommen wir $0 \leq |a-b|$, also eine wahre Aussage.

Fall 3 , $a < 0, b > 0$: Wir erhalten $|a| + |b| = -a + b$ und $|a-b| = -a+b$. Somit folgt durch nochmaliges einsetzen $|a+b| \geq 0$, was wieder eine wahre Aussage ist.

Fall 4 , $a > 0, b < 0$: Hier erhalten wir $|a| + |b| = a - b$ und $|a-b| = a-b$. Einsetzen liefert die richtige Aussage $|a+b| \geq 0$.

Fall 5 , $a = 0$: Damit ist $|a| + |b| = |b|$ und $|a-b| = |a+b| = |b|$. Damit stimmt auch in diesem Fall die Behauptung.

□

Der Übungsteilnehmer scheint der Meinung zu sein, zum Beweis einer Aussage genügt es aus ihr eine wahre Aussage herzuleiten. Dem ist natürlich nicht so wie folgendes einfache Beispiel zeigt.

Behauptung: Es gilt $(-1) = 1$

Beweis: $(-1) = 1 \Rightarrow (-1)^2 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$

□

Wir können also aus $(-1) = 1$ die wahre Aussage $1 = 1$ herleiten. Damit gilt aber noch lange nicht $(-1) = 1$.
Ein richtiger Beweis wäre gar nicht so schwer gewesen wie wir unter Benutzung der Dreiecksungleichung und der Homogenität des Betrages schnell sehen werden: **Beweis:**
Wir können zuerst ein mal festhalten:

$$\begin{aligned}
|a| = |a+0| &= \left|\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a\right) + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + \left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right| + \left|\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right| \\
&= \frac{1}{2}\left(|a+b| + |a-b|\right)
\end{aligned}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
|b| = |b+0| &= \left|\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\right) + \left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b\right)\right| \\
&= \left|\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) + \left(\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right| + \left|\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right| + \left|\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b\right| \\
&= \frac{1}{2}\left(|a+b| + |a-b|\right)
\end{aligned}
$$

Addieren wir nun beider Ungleichungen zusammen so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
|a| + |b| &\leq \frac{1}{2}\left(|a+b| + |a-b|\right) + \frac{1}{2}\left(|a+b| + |a-b|\right) \\
&= |a+b| + |a-b|
\end{aligned}
$$

was die Behauptung war.

$\square$

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 2.3 (a)

Wo steckt der Fehler?

Diese Ausführung nimmt Bezug auf Aufgabe 2.3 (a) (Analysis I WS08/09). Es sollte für a, $b \in \mathbb{R}$ gezeigt werden:

$$|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

Behauptung: Es seien a, $b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

Beweis:

Annahme: $|a+b| + |a-b| < |a| + |b|$
Aber offensichtlich gilt: $|5+2| + |5-2| \geq |5| + |2|$
Das ist ein Widerspruch.

Q.e.d.

Die Beiweisstruktur selbst ist dabei nicht falsch. Aus einem Gegenbeispiel zur Negation der Behauptung folgt die Korrektheit der selben, allerdings ist bei dem vorliegenden Beweis eben diese Negation fehlerhaft. Betrachten wir dazu zuerst die formal korrekte Behauptung:

$$\forall\ a,\ b \in \mathbb{R} : |a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

Dazu die korrekte Negation:

$$\exists\ a,\ b \in \mathbb{R} : |a+b| + |a-b| < |a| + |b|$$

Zu dieser korrekten Negation wird es nun nicht gelingen ein Gegenbeispiel zu finden.

Im Gegensatz dazu die falsche Negation, welche im obigen Beweis verwendet wurde:

$$\forall\ a,\ b \in \mathbb{R} : |a+b| + |a-b| < |a| + |b|$$

Zu welcher ein Gegenbeispiel offensichtlich ist.

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 11 (Felix Kleber)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Konsequenz einer falschen Annahme

Schöne Idee einer Studentin zur 'Lösung' der Zusatzaufgabe von Übungsblatt 2. Zur Aufgabenstellung: Auch aus einer falschen Annahme kann man in richtiger Weise schlussfolgern. Über den Wahrheitsgehalt der schlussgefolgerten (implizierten) Aussage kann man a priori nicht entscheiden, d.h. sie kann entweder wahr oder falsch sein. Welche reelle Zahl müsste die größte sein, unter der (falschen) Annahme, dass eine größte reelle Zahl existiert?

Vorausstzung: Es existiert eine größte Zahl $M \in \mathbb{R}$.

Behauptung: $M = 0$.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt: $a \leq M$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt also: $0 \leq M$.
Daraus folgt durch Addition beider Seiten mit M: $M \leq M + M$.
Da M die größte Zahl in $\mathbb{R}$ ist, folgt außerdem: $M + M \leq M$.
Damit haben wir: $M \leq M + M \leq M$, also $M + M = M$ und demnach $M = 0$. 'q.e.d.'

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 13 (Christoph Litschka)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 2.2 (iii)

Wo steckt der Fehler?

Bei der Aufgabe 2.2 (ii), war zu lösen: $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Häufig wurde sie von den Studenten wie folgt gelöst:

$$
\begin{aligned}
& (-x)(-y) && (1)\\
= \; & ((-1)x)((-1)y) && (2)\\
= \; & [((-1)x)(-1)]y && (3)\\
= \; & [(-1)((-1)x)]y && (4)\\
= \; & [((-1)(-1))x]y && (5)\\
= \; & [(-(-1))x]y && (6)\\
= \; & [1x]y && (7)\\
= \; & xy && (8)
\end{aligned}
$$

Wie man sehen kann, ist der Schritt von Zeile (1) zu (2) und von Zeile (5) zu (6) nicht mit Körperaxiome oder Defintionen möglich. Für diese Schritte wird benötigt, dass $-x = (-1)x$ gilt.
Zeige also $(\star) - x = (-1)x$:
Mit $x + (-x) = -x + x = 0$ folgt $-x$ ist Inverses zu x und
Mit $x + (-1x) = 1x + (-1x) = 0$ und $(-1x) + x = (-1x) + 1x = 0$ folgt, dass $-1x$ inverses zu x ist.
Mit der Eindetigkeit des Inverses folgt dann $-x = -1x$. Zu beachten ist, dass $-x = -1x = (-1)x$ gilt.
Dann läst sich der Beweis korekt wie folgt schreiben:

$$
\begin{aligned}
& (-x)(-y) && (9)\\
\overset{(\star)}{=} \; & ((-1)x)((-1)y) && (10)\\
\overset{\text{Assoziativitt}}{=} \; & [((-1)x)(-1)]y && (11)\\
\overset{\text{Kommutativitt}}{=} \; & [(-1)((-1)x)]y && (12)\\
\overset{\text{Assoziativitt}}{=} \; & [((-1)(-1))x]y && (13)\\
\overset{(\star)\text{ für x=(-1)}}{=} \; & [(-(-1))x]y && (14)\\
\overset{\text{(ii) für y=1}}{=} \; & [1x]y && (15)\\
\overset{\text{Neutrales der Mult.}}{=} \; & xy && (16)
\end{aligned}
$$