Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 4 (Bernhard Barth)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 4

Notationsschwierigkeiten

Voraussetzung: Wir betrachten den $\mathbb{R}^2$ ausgestattet mir folgenden Verknüpfungen:

$$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$$

Behauptung: $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ ist ein Körper

Beweis: Wir beweisen exemplarisch das Assoziativgesetz.

$$\begin{aligned}
&((a,b)+(c,d))+(e,f)\\
&\Rightarrow (a+c,b+d)+(e,f)\\
&\Rightarrow ((a+c)+e,(b+d)+f))\\
&\Rightarrow (a+(c+e),b+(d+f))\\
&\Rightarrow (a,b)+(c+e,d+f)\\
&\Rightarrow (a,b)+((c,d)+(e,f))
\end{aligned}$$

$\square$

Damit ist leider überhaupt nichts bewiesen. Die erste Folgerung

$$((a,b)+(c,d))+(e,f) \Rightarrow (a+c,b+d)+(e,f)$$

würde in gesprochener Form, einer Aussage wie „Äpfel daraus folgt Fahrrad“ entsprechen. Dann könnte es z.B. mit „Fahrrad daraus folgt Tür“ weiter gehen (entspricht der zweiten Folgerung). Insgesamt erhalten wir also dann scheinbar „Äpfel daraus folgt Tür“. In der Mathematik ist man daran interessiert Aussagen mit einander zu vergleichen. So können wir z.B. folgern: „Äpfel enthalten Zucker“, „Zucker ist süss“, daraus folgt „Äpfel sind süss“. Wollen wir nun den obigen Beweis richtig führen so könnten wir z.B. folgendermassen vorgehen:

Beweis: Wir beweisen exemplarisch das Assoziativgesetz.
zu zeigen: Für alle $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2$ gilt: $((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$

Es gilt nach Definition: $((a,b)+(c,d))=(a+c,b+d)$. Daraus folgt:

$$((a,b)+(c,d))+(e,f)=(a+c,b+d)+(e,f)).$$

Wenden wir wieder die Definition den Addition an so erhalten wir:

$$((a,b)+(c,d))+(e,f)=((a+c)+e,(b+d)+f)).$$

Da $\mathbb{R}$ ein Körper ist gilt: $(a+c)+e = a+(c+e)$ und analog $(b+d)+f = b+(d+f)$. Somit erhalten wir

$$((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a+(c+e), b+(d+f)).$$

Lesen wir nun die Definition der Addition Rückwärts folgt

$$((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+(c+e, d+f).$$

Das selbe Argument wie eben angewandt auf den hinteren Teil liefert nun letztlich

$$((a,b)+(c,d))+(e,f) = (a,b)+((c,d)+(e,f)).$$

$\square$

Es gibt aber auch eine nicht allzu Schreibaufwnändige Alternative. Dabei stellt man eine Gleichungskette auf, bei der allerdings jeder Schritt argumentiert werden muss.

Beweis: Wir beweisen exemplarisch das Assoziativgesetz.

$$\begin{aligned}
((a,b)+(c,d))+(e,f) &= ((a+c)+e, (b+d)+f)) && \text{Definition der Addition} \\
&= ((a+c)+e, (b+d)+f)) && \text{Definition der Addition} \\
&= (a+(c+e), b+(d+f)) && \text{Assoziativgesetz in } \mathbb{R} \\
&= (a,b)+(c+e, d+f) && \text{Definition der Addition} \\
&= (a,b)+((c,d)+(e,f)) && \text{Definition der Addition}
\end{aligned}$$

$\square$

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 9 (Christina Metzdorf)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 6.5

Wo steckt der Fehler?

Auf dem Übungsblatt 3 wurde die folgende Aufgabe gestellt:

Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $x \cdot x = x^2 = (0,1)$
Häufig lautete die Lösung folgendermaßen:

Beh.: Die Lösungen zu $x \cdot x = x^2 = (0,1)$ sind $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ und $(-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2})$
Bew.: Sei $x := (x_1, x_2)$ Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
x^2 = (x_1, x_2)^2 = (0,1) \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1^2 - x_2^2, x_1x_2 + x_2x_1) = (0,1) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \ \wedge \ 2x_1x_2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \wedge \ 2x_1x_2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x_1^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 = \pm\sqrt{1/2} = x_2 \\
&\Rightarrow \quad \text{Behauptung}
\end{aligned}
$$

Das Problem bei der Lösung ist die Ungenauigkeit. Dies beginnt schon bei der Behauptung. Genau genommen sollte dort schon gesagt werden, dass es außer den zwei angegeben Lösungen keine weiteren gibt, da die Aufgabenstellung alle Lösungen verlangt.

Der erste tatsächliche Fehler liegt bei der Umformung:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Der Vollständigkeit halber müsste hier stehen:

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = -x_2.$$

Dadurch erhält man als weitere Bedingung:

$$2x_1^2 = 1 \text{ für den Fall } x_1 = x_2$$

und

$$-2x_1^2 = 1 \text{ für den Fall } x_1 = -x_2.$$

Da im zweiten Fall die Lösungen $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{-1/2}$ komplexe Zahlen sind, wobei hier ja ausschließlich Lösungen in $\mathbb{R}^2$ gesucht sind, erhält man tatsächlich nur aus dem 1. Fall relevante Lösungen und zwar $x_1 = x_2 = \pm\sqrt{1/2}$ wie oben behauptet. Allerdings ging aus der obigen Rechnung nicht hervor, dass es die einzigen Lösungen sind.
Außerdem sollte darauf hingewiesen werden, dass die Schreibweise $x_1 = \pm\sqrt{1/2} = x_2$ etwas unklar ist, da man denken könnte, dass z.B. $x_1 = \sqrt{1/2}, x_2 = -\sqrt{1/2}$ ebenfalls eine Lösung darstellt, was jedoch nicht der Fall ist.