Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Etwas Grundsätzliches

anhand Aufgabe 4.4 i)

Aufgabe: Es sei $D \subset \mathbb{N}$ die Menge aller natürlicher Zahlen, welche durch 3 teilbar sind. Konvergiert dann $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$?

Anmerkung:

Grundsätzlich darf man bereits in der Vorlesung bewiesene Sachen zitieren!
Man muss bei dieser Aufgabe nicht noch einmal die Divergenz der harmonischen Reihe beweisen.
Ein Übungsteilnehmer hat bei dieser Aufgabe mit Hilfe des Cauchyschen Verdichtungskriterium nachgerechnet, dass die harmonische Reihe nicht konvergiert. Das ist überflüssig und unnötig kompliziert. Des weiteren kommt hinzu, dass die Gültigkeit des Cauchyschen Verdichtungskriteriums erst auf dem nächsten Blatt nachgewiesen werden soll. Insofern wurde etwas nicht bewiesenes verwendet.
Generell sollte man einen Beweis nicht unnötig kompliziert gestalten!

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 3 (Martin Saal)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” zur Aufgabe 4.0b

Wo steckt der Fehler?

Voraussetzung: Es sei $M \subset \mathbb{C}$, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Behauptung: M abzählbar und dicht in $\mathbb{C}$

Beweis: Setze $M = \mathbb{Q}^2$, genügt z.z.: $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$ (abzählbar folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und Lemma 2.20)
Nach Lemma gilt: $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$
Sei $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ und $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$
z.z.: $|(r_1, r_2) - (q_1, q_2)| < \epsilon$
$\Rightarrow |(r_1 - q_1, r_2 - q_2)| < \epsilon$
$\Rightarrow \sqrt{(r_1 - q_1)^2 + (r_2 - q_2)^2} < \epsilon$
$\Rightarrow |r_1 - q_1| < \epsilon \wedge |r_2 - q_2| < \epsilon$
Wegen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ und $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ folgt die Behauptung.
q.e.d.

In diesem Beweis gibt es bereits eine Reihe Problem, aber die Schwierigkeiten fangen schon in der Voraussetzung an. Zunächst wird M als eine beliebige Menge von $\mathbb{C}$ für die gesamte Aufgabe festgelegt, im Beweis jedoch speziell gewählt. So wie es oben steht müsste die Behauptung für jede Teilmenge gelten!
Im Beweis gehen dann in Zeile 3 die Problem los. Hier werden zwei beliebige Elemente aus $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{Q}^2$ gewählt, die dann $|(r_1, r_2) - (q_1, q_2)| < \epsilon$ erfüllen sollen. Da über das ϵ jedoch nichts ausgesagt wird, führt der Beweis nicht zu dem gewünschten Ziel.
Der Fehler liegt in der unsauberen Anwendung der Definiton. Man muss ein $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig nehmen und dann zeigen, dass es für alle $\epsilon > 0$ ein $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ gibt, mit $|(r_1, r_2) - (q_1, q_2)| < \epsilon$.
Anschlieend wird noch aus dem, was zu zeigen ist, gefolgert, was natürlich keine Aussage über den Wahrheitsgehalt der Behauptung zulässt.
Korrekt lautet der Beweis:

Behauptung: $\exists M \in \mathbb{C}$: M abzählbar und dicht in $\mathbb{C}$

Beweis: Identifiziere $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ und setze $M := \mathbb{Q}^2$.
genügt z.z.: $\mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$ (abzählbar folgt aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und Lemma 2.20)
Sei $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig, nach Lemma gilt: $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$
$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \;\; \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} : |r_1 - q_1| < \frac{\epsilon}{2}, |r_2 - q_2| < \frac{\epsilon}{2}$
Setzte $q := (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$
$\Rightarrow |r - q| = |(r_1 - q_1, r_2 - q_2)| \leq |r_1 - q_1| + |r_2 - q_2|$ (Dreicksungleichung)
$\Rightarrow |r - q| \leq |r_1 - q_1| + |r_2 - q_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
$\Rightarrow \forall r \in \mathbb{R}^2 \;\; \forall \epsilon > 0 \;\; \exists q \in \mathbb{Q}^2 : |r - q| < \epsilon$
$\Rightarrow \mathbb{Q}^2$ dicht in $\mathbb{R}^2$
q.e.d.

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” zur Aufgabe 4.0a

Notationsschwierigkeiten

Behauptung: Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert, d.h $\mathbb{C}$ ist vollständig.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge. Des weiteren sei $a_n = c_n + id_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned}|a_n - a_m| &= |c_n + id_n - (c_m + id_m)| \\ &= |c_n - c_m + i(d_n - d_m)| \\ &\leq |c_n - c_m| + |d_n - d_m| = |c_n - c_m| + \sqrt{(d_n - d_m)^2} \\ &= |c_n - c_m| + (d_n - d_m)\end{aligned}$$

Fall 1: $d_n - d_m \geq 0$
es folgt: $d_n - d_m = |d_n - d_m|$ und somit $|c_n - c_m| + d_n - d_m = |c_n - c_m| + |d_n - d_m|$

Fall 2: $d_n - d_m \leq 0$
es folgt: $d_n - d_m = -|d_n - d_m|$ und somit $|c_n - c_m| + d_n - d_m = |c_n - c_m| - |d_m - d_n|$

Offensichtlich gilt:

$$|c_n - c_m| - |d_n - d_m| \leq |c_n - c_m| + |d_n - d_m|$$

und damit ergibt sich

$$|c_n - c_m + i(d_n - d_m)| \leq |c_n - c_m| + |d_n - d_m|$$

Sei nun $m \geq n_0 := \frac{\epsilon}{2}$, dann gilt

$$\begin{aligned}|c_n - c_m| &\leq \frac{\epsilon}{2} \\ |d_n - d_m| &\leq \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

Nun kinen wir schliessen

$$|a_n - a_m| \leq |c_n - c_m| + |d_n - d_m| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert.

□

Scheinbar ist dem Übungsteilnehmer nicht ganz klar was überhaupt zu zeigen ist, denn das Ergebnis (der falschen) Überlegungen ist nicht etwa die Behauptung sondern die Voraussetzung, nämlich, dass (a_n) eine Cauchy Folge ist. Korrekter Weise würde man einen „Grenzwert“ suchen, um dann zu zeigen, dass die Cauchy-Folge gegen diesen, vermuteten Grenzwert, konvergiert. Wir führen dies nun einmal sauber aus.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Cauchy-Folge. Dann gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n(\epsilon) \in \mathbb{N} \text{ mit } \; |a_n - a_m| \leq \epsilon \text{ für alle } n, m \geq n(\epsilon).$$

Sei nun also $\epsilon > 0$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_n - a_m| \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N$ gilt. Wegen

$$|a_n - a_m| = \sqrt{(Re(a_n) - Re(a_m))^2 + (Im(a_n) - Im(a_m))^2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} |Re(a_n) - Re(a_m)| &\leq \epsilon \text{ für } n, m \geq N \text{ und ebenso} \\ |Im(a_n) - Im(a_m)| &\leq \epsilon \text{ für } n, m \geq N \end{aligned}$$

D.h. aber gerade, dass $(Re(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $(Im(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ Cauchy-Folgen bilden.
Wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ existiert also ein $x \in \mathbb{R}$ mit $Re(a_n) \to x$ und ein $y \in \mathbb{R}$ mit $Im(a_n) \to y$.
Definieren wir nun $z := x + iy \in \mathbb{C}$ so liegt es nahe, dass z der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist. Dies möchten wir im Folgenden auch zeigen und weisen dafür nach, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $n(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - z| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n(\epsilon)$.

Sei also $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt

$$|a_n - z| \leq |Re(a_n) - x| + |Im(a_n) - y| \,.$$

Wählen wir nun $N \in \mathbb{N}$ so , dass

$$\begin{aligned} |Re(a_n) - x| &\leq \frac{\epsilon}{2} \\ |Re(a_n) - x| &\leq \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

für alle $n \geq N$ gilt, so erhalten wir

$$|a_n - z| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

für alle $n \geq N$.
Wir haben also gezeigt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = z$ und somit konviergiert die beliebig gewählte Cauchy-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, womit die vollständigkeit von $\mathbb{C}$ gezeigt ist.

$\square$

Analysis I (WS 08/09) Universität Konstanz
Denk/Rheinländer FB Mathematik & Statistik
Gruppe 11 (Felix Kleber)

Fallgruben-Sammlung

“Musterlösung” Aufgabe 4.4

Wo steckt der Fehler?

Zu Aufgabe 4.4 a): Falsche Anwendung des ”Majorantenkriteriums”.

Voraussetzung: $D = \{d \in \mathbb{N} : d = 3n, n \in \mathbb{N}\}$.

Behauptung: $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$ divergiert.

Beweis: Wir wissen, dass die harmonische Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ divergiert.
Außerdem gilt $|\frac{1}{3n}| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die harmonische Reihe eine divergente Majorante zu $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$. Also muss auch $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$ divergieren. ’q.e.d.’

Diskussion: Zwar ist die Behauptung richtig, jedoch der Beweis hierzu falsch. Denn das Majorantenkriterium bezieht sich nur auf die Konvergenz einer Reihe, nicht auf die Divergenz. Hätte man in dieser Weise argumentieren wollen, so hätte man eine divergente Minorante finden müssen, um damit die Divergenz der angegeben Reihe zu zeigen. Konkret bedeutet das: Finde eine divergente Reihe $\sum a_n$ mit $\sum a_n \leq \sum_{n \in D} \frac{1}{n}$. $\sum a_n$ ist hierbei die divergente Minorante.
(Einfacher ist hier aber, die Reihe $\sum_{n \in D} \frac{1}{n}$ in Bezug auf die harmonische Reihe darzustellen, welche ja divergiert.)

Analysis I (WS 08/09)
Denk/Rheinländer
Gruppe 12 (Alexander Schöwe)

Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik

Fallgruben-Sammlung

"Musterlösung" zur Aufgabe 4.0 a)

Wo steckt der Fehler?

Aufgabe 4.0 a)
Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ vollständig ist

Einige Übungsteilnehmer haben versucht den Beweis aus der Vorlesung für die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu übertragen. Der eine hat sich dazu mehr der andere weniger Gedanken gemacht, dennoch sind alle Beweise falsch. Hier sollen die verschiedenen Stufen vorgestellt werden.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine Cauchyfolge. Da Cauchyfolgen beschränkt sind $\exists K > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$
Definieren nun $c_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, ...\}$

Schon hier ist der Beweis falsch, bzw. macht kein Sinn. Das Problem liegt in der Definition der c_n, denn $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet, folglich ist auch das Infimum nicht definiert.

Wir versuchen das durch Setzen von Beträgen zu beheben, d.h. $c_n := \inf\{|a_n|, |a_{n+1}|, ...\}$
Dann ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch K nach oben beschränkt (vgl. Vorlesung) woraus die Konvergenz folgt. Sei $c := \lim_{n\to\infty} c_n$
dann gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 : |c_n - c_m| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k(n) \geq n : |c_n - a_{k(n)}| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

Die dritte Zeile stimmt hier aber nicht. Im Beweis für $\mathbb{R}$ folgte dies aus der Definition des Infimums, da wir unser Infimum aber wie oben beschrieben anders definieren mussten, gilt diese Zeile nicht mehr. Man kann sich das einfach an folgendem Beispiel überlegen. Definieren $a_n := i \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist offensichtlich $c_n = 1 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gleichzeitig ist aber $|c_n - a_{k(n)}| = |1 - i| = \sqrt{2}$

Versuchen wir auch dieses Problem zu beheben indem wir die dritte Zeile durch

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k(n) \geq n : |c_n - |a_{k(n)}|| < \varepsilon \tag{4}$$

ersetzen.
Dann folgt ähnlich wie in Vorlesung

$$||a_n| - c| \leq \varepsilon$$

Das ist aber leider nicht das Gewünschte. Denn wir wollten die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zeigen und nicht die Konvergenz der Betragsfolge. Dass das einen Unterschied macht, kann man sich sofort an einem Beispiel klar machen. Betrachte

$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ -1, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \end{cases}$$