Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Robert Denk

5. Dezember 2008

Analysis I
Probeklausur

Name, Vorname	Matrikelnummer	Gruppe

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						

Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 120 min. Es dürfen keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Formelsammlung oder Mitschrift der Vorlesung verwendet werden. Die Lösungen sollen auf die jeweiligen Aufgabenblätter und – wenn nötig – auf deren Rückseiten geschrieben werden. Konzeptpapier bitte nicht mit abgeben.

Jedes abgegebene Blatt mit Name, Vorname und Gruppe versehen und auf Lesbarkeit achten!

Viel Erfolg!

Diese Probeklausur ist wie ein normales Übungsblatt zu bearbeiten.
Abgabetermin: 12. 12. 2008, vor der Vorlesung.

Aufgabe 1

Name, Vorname	Gruppe	Punkte

Welche der folgenden Aussagen stimmen? Kreuze an!
Jedes richtige Kreuz ergibt einen Pluspunkt, jedes falsche einen Minuspunkt. Werden richtige Antworten nicht angekreuzt, gibt es dafür null Punkte.

1)	Aus $(A \Rightarrow B)$ folgt $\big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big)$.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
2)	Jede Teilfolge einer Cauchyfolge ist wieder eine Cauchyfolge.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
3)	$\mathbb{C}$ wird durch $(x < y) :\Leftrightarrow (\operatorname{Re} x < \operatorname{Re} y)$ zu einem geordneten Körper.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
4)	Eine Folge $(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn für alle $\eta \in (0, \infty)$ ein $a \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $b, c \geq a$ gilt: $\lvert z_b - z_c \rvert < \eta$.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
5)	Eine absolut konvergente Reihe kann man so umordnen, dass sie divergiert.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
6)	Eine Reihe reeller Zahlen ist genau dann absolut konvergent, wenn sie konvergent ist.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
7)	Eine Menge, die nicht offen ist, muss abgeschlossen sein.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
8)	Eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
9)	Es gibt beschränkte Mengen reeller Zahlen, die keinen Häufungspunkt besitzen.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht
10)	Gleichmäßig stetige Funktionen sind beschränkt.	☐ stimmt ☐ stimmt nicht

Aufgabe 2

Name, Vorname	Gruppe	Punkte

Definiere die folgenden Begriffe (jeweils 2 Punkte):

a) Eine Menge M ist *endlich*.

b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *konvergiert*.

c) Eine Abbildung ist eine *Norm*.

d) Eine Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{C}$ ist *gleichmäßig stetig*.

Gib jeweils ohne Begründung ein Beispiel an (jeweils $^1/_2$ Punkt).

Aufgabe 3

Name, Vorname	Gruppe	Punkte

Untersuche die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz oder Divergenz (jeweils 2 Punkte):

a) $\left(\frac{n^2(n+1)+\left(n+\frac{1}{n}\right)^3+5}{7n\sqrt{n^4+1}+2\frac{n}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz oder Divergenz (jeweils 3 Punkte):

c) $\sum_{k=2}^{\infty}\binom{k}{2}\frac{(-2)^k}{k!}$,

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-5^{-k}k}{k}$.

Aufgabe 4

Name, Vorname	Gruppe	Punkte

a) Erkläre den Begriff *Supremum* und beweise, dass dieses eindeutig bestimmt ist. (3 Pkte)

b) Formuliere – ohne Beweis – zwei Axiome, die zum Vollständigkeitsaxiom äquivalent sind. (2 Pkte)

c) Bestimme – sofern vorhanden und mit Begründung – Supremum, Maximum, Infimum und Minimum der Menge A reeller Zahlen mit

$$A := \left\{ \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{m} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(3 Pkte)

d) Bestimme den Abschluss $\overline{A}$ obiger Menge A. (2 Pkte)

Aufgabe 5

Name, Vorname	Gruppe	Punkte

Es seien $a < b$ und $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f\big([a,b]\big) \subset [a,b]$. Zeige:

a) Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) - x = 0$. (2 Pkte)

b) Wenn f monoton wachsend ist, dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n := f(x_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $x_0 := a$, monoton wachsend und konvergiert gegen einen Fixpunkt von f. (4 Pkte)

c) Die Menge der Fixpunkte $F := \{x \in [a,b] \mid f(x) = x\}$ ist abgeschlossen. (2 Pkte)

d) Gib – mit Begründung – eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ an, die genau einen Fixpunkt besitzt. (2 Pkte)