Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 02. Mai, SS 2006
Abgabe : 08. Mai bis 10 Uhr

Analysis II

2. Übungsblatt

Aufgabe 2.1: Zur Wiederholung: Landau'sche Ungleichung

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Beweisen Sie, daß dann für die Suprema von f und seinen Ableitungen $M_j := \sup\{|f^{(j)}(x)| : \ x > 0\}$ mit $j \in \{0, 1, 2\}$ die folgende Ungleichung besteht:

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2 \ .$$

Anleitung: Stellen Sie $f(x+h)$ mittels der Taylorentwicklung (inklusive Restglied) dar. Leiten Sie daraus eine Abschätzung für M_1 her, welche abgesehen von M_0 und M_1 zunächst noch von h als freiem Parameter abhängt. Optimieren Sie die Abschätzung durch geeignete Wahl von h.

Aufgabe 2.2: Integralberechnung mittels Riemann-Summen

Berechnen Sie das Integral der Potenzfunktion $x \mapsto x^p$ mit $p \in \mathbb{N}$ über dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mittels Riemannscher Summen und verifizieren Sie somit die Formel

$$\int_a^b x^p \, \mathrm{d}x \ = \ \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

a) Benutzen Sie eine äquidistante Zerlegung. **Hinweis:** Denken Sie an Aufgabe 2.2 bzw. Aufgabe 3.2 der Analysis I Übungen (Potenzsummenformeln).

b) Verwenden Sie die auf Fermat zurückgehende geometrisch progressierende Zerlegung $x_k = a(b/a)^{k/n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, ..., n\}$.

Aufgabe 2.3: Taylorformel mit Integral-Restglied

Leiten Sie aus dem Hauptsatz der Infinitesimalrechnung die folgende Taylor-Formel für eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $x_0, x \in I$ her:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \tfrac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x - \xi)^n f^{(n+1)}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Hinweis: Man beginne mit dem Hauptsatz und füge künstlich im Integral über f' den Faktor 1 hinzu, welcher beim Durchführen der partiellen Integration mit geeigneter Integrationskonstante aufzuleiten ist, während f' abgeleitet wird.

Aufgabe 2.4: Basiswissen über konvexe Funktionen

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Beweisen Sie:

a) (Jensensche Ungleichung) Ist f konvex, so gilt für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots x_n \in I$ sowie $\lambda_1, \dots \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

b) (Drei-Sekanten-Lemma) Die Funktion f ist genau dann konvex, falls für alle $x_1, x_2, x_3 \in I$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ die folgende Ungleichungskette besteht:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

c) (hinreichendes Konvexitätskriterium) Ist f zweimal differenzierbar und gilt $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f konvex.

d) Der negative Logarithmus ist eine konvexe Funktion. Nutzen Sie dies, um die folgende Verallgemeinerung der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel zu beweisen.

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \ldots \lambda_n x_n$$

Dabei sind $x_1, ..., x_n$ sowie $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nicht-negative Zahlen mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.