Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 15. Mai, SS 2006
Abgabe : 22. Mai bis 10 Uhr

Analysis II

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1: Rekursive Berechnung von Integralen

In vielen Fällen, die keine direkte Berechnung eines Integrals erlauben, gelingt es jedoch, Rekursionsformeln herzuleiten. Dies soll an zwei Beispielen nachvollzogen werden:

a) Leiten Sie die folgende Rekursionsformel für die Stammfunktionen der Potenzen des Sinus her:

$$\int \sin(x)^n \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\sin(x)^{n-1}\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin(x)^{n-2}\,\mathrm{d}x.$$

Hinweis: Natürlich ist es nicht Sinn der Aufgabe, die obige Formel durch simples Ableiten zu verifizieren, denn in der Praxis mag Ihnen die Rekursionsformel unbekannt sein.

b) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x,$$

welches mit den Momenten der Normalverteilung zusammenhängt. Aus der Bemerkung zu Aufgabe 3.2 geht hervor (wie?), daß der Wert des Integrals für $n = 0$ gerade $\sqrt{2\pi}$ beträgt.

Aufgabe 4.2: Integralnormen

a) Zeigen Sie, daß auf der Menge der stetigen Funktionen $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{mit } \; p \geq 1$$

eine Norm definiert ist. Prüfen Sie dazu die Norm-Axiome (Eigenschaften) minutiös nach.

b) Beweisen Sie für $q \geq p \geq 1$ die Ungleichung

$$\|f\|_p \leq |b-a|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_q \,.$$

Führen Sie auch eine Abschätzung der p-Norm bzgl. der Supremumsnorm durch. **Tip:** Die Ungleichung von Hölder könnte weiterhelfen.

c) Neben den p-Normen gibt es noch die Unendlich-Norm $\|\cdot\|_\infty$, welche im $\mathbb{R}^n$ oft als Maximumsnorm oder allgemeiner als Supremumsnorm bezeichnet wird. Rechtfertigen Sie die Bezeichnung “Unendlich-Norm”, indem Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ zeigen: $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

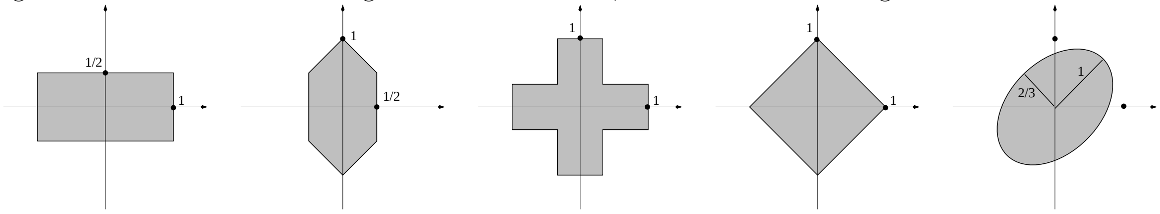
bitte wenden

Aufgabe 4.3: Jede Form eine Norm?

Im folgenden betrachten wir zu einer Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ die Abbildung $N_E : D(N_E) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$, welche durch

$$N_E(\mathbf{x}) := \inf\{\lambda > 0 | \ \mathbf{x} \in \lambda E\}$$

gegeben ist. Wie muß die Menge E beschaffen sein, damit N_E auf dem gesamten $\mathbb{R}^n$ definiert ist?



a) Überprüfen Sie, welche der abgebildeten Mengen tatsächlich die Einheitssphäre einer Norm im $\mathbb{R}^2$ darstellen und geben Sie die zugehörige Norm an bzw. begründen Sie die negativen Fälle.

b) Für die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ gelte

   i) E ist *konvex*, $\forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda \in [0, 1] : \ \lambda x + (1 - \lambda)y \in E$

   ii) E ist punktsymmetrisch, d.h. $E = -E$,

   iii) E ist beschränkt und enthalte eine Umgebung der 0 (bzgl. der euklidischen Norm)

   Zeigen Sie, daß in diesem Fall durch N_E eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. Was können Sie über die Umkehrung sagen?

"Zugabe"

Aufgabe 4.4: Weitere Integrationsübung

Um am eigenen Leib zu erfahren, daß das Integrieren deutlich aufwendiger sein kann als die inverse Operation des Differenzierens, berechnen Sie die beiden folgenden unbestimmten Integrale:

$$\text{i)} \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 2\sqrt[3]{x} - 4} \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$$

Hinweis: Nach geeigneter Substitution hilft ggf. eine Partialbruchzerlegung weiter.

Aufgabe 4.5: Ein spezieller Satz über das Oszillationsverhalten stetiger Funktionen

Beweisen Sie: Es sei $f \in \mathcal{C}\big([0, \pi]\big)$ eine stetige Funktion, welche der Bedingung

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \ = \ 0 \ = \ \int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

genügt. Dann hat f mindestens zwei Nullstellen im offenen Intervall $(0, \pi)$.
Anmerkung: Faßt man das Integral des Produkts zweier Funktionen als deren Skalarprodukt auf, so läßt sich die Behauptung auch so formulieren: Ist eine im Intervall $[0, \pi]$ stetige Funktion sowohl zur Sinus- wie Kosinusfunktion orthogonal, so nimmt sie mindestens zweimal den Wert 0 im offenen Intervall $(0, \pi)$ an. Dies impliziert also eine gewisse Oszillation der Funktion; insbesondere kann sie nicht streng monoton sein. Wie man sieht, hängt das Oszillationsverhalten von den Orthogonalittseigenschaften ab. (vgl. hierzu entsprechend allgemeinere Sätze.)