



Analysis II

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1: Metrik der französischen Eisenbahn

Das klassische Fernverkehrs- und Hochgeschwindigkeitsnetz der SNCF (Société Nationale des Chemins de Fer) besteht etwas idealisiert aus Strecken, welche strahlenförmig von Paris ausgehen und die Capitale vergleichsweise geradlinig mit den Hauptzentren der verschiedenen Regionen verbinden. Ein Reisender, der vom Ort A zum Ort B fahren möchte, muß daher immer den Umweg über Paris nehmen, falls die beiden Orte nicht auf derselben Strecke liegen.

Geben Sie eine Metrik im \mathbb{R}^2 an, welche diesen Sachverhalt modelliert.

Bemerkung: Gesucht ist eine geeignete Abstandsfunktion, die auf die Eigenschafts-Axiome einer Metrik hin zu untersuchen ist. Beachten Sie, daß die Abstandsfunktion mittels einer Fallunterscheidung zu definieren ist, je nachdem ob zwei Punkte auf einer Geraden durch den Zentralpunkt liegen oder nicht.



Aufgabe 5.2: Topologische Fingerübungen

Im folgenden seien X, Y zwei topologische (metrische) Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Zur Erinnerung: f heißt genau dann stetig wenn gilt:

$$\forall x \in X, \forall V(f(x)) \subset Y, \exists U(x) \subset X : f(U(x)) \subset V(f(x))$$

Dabei bedeuten $U(x)$ und $V(f(x))$ (offene) Umgebungen von x bzw. $f(x)$.

- a) Es sei I eine beliebige Indexmenge und für jedes $i \in I$ sei $A_i \subset X$. Weisen Sie die folgenden Inklusionsbeziehungen nach:

$$\text{i) } \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^\circ \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i \quad \text{ii) } \bigcup_{i \in I} \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \quad \text{iii) } \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i \subset \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ \quad \text{iv) } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A}_i$$

Begründen Sie, daß im Falle von i) und ii) auch die umgekehrten Inklusionsbeziehungen bestehen, falls I eine endliche Indexmenge ist. Geben Sie Beispiele an, die belegen, daß die Inklusionsbeziehungen im strengen Sinne gelten.

- b) $x \in X$ heißt Berührungspunkt der Teilmenge $M \subset X$, falls für alle Umgebungen $U(x)$ von x gilt $U(x) \cap M \neq \emptyset$. Beweisen Sie: Ist x Berührungspunkt von M so ist $f(x)$ Berührungspunkt von $f(M)$. Folgern Sie daraus: $f(\partial M) \subset \overline{f(M)}$. Warum gilt auch $f(\partial M) \subset f(\overline{M})$?

- c) (Charakterisierung der Stetigkeit) Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig.
- $\forall M \subset X : f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.
- $A \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(A) \subset X$ abgeschlossen.
- $O \subset Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(O) \subset X$ offen.