Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 06. Jun., SS 2006
Abgabe : 12. Jun. bis 10 Uhr

Analysis II

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1: 'Some facts about compacts'

a) Zeigen Sie, daß jede kompakte Menge eines metrischen Raumes notwendigerweise beschränkt sein muß.

b) Der Durchmesser einer Teilmenge A eines metrischen Raums (M, d) ist definiert durch

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Zeigen Sie, daß in einer kompakten Menge $K \subset M$ stets zwei Elemente $x, y \in K$ existieren mit $\mathrm{diam}(K) = d(x, y)$.

c) (Spezielle Überdeckungseigenschaft kompakter Mengen) Es sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum (bzw. K eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (M, d)). Zeigen Sie, daß es zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von K ein $\epsilon > 0$ gibt derart, daß für jedes $x \in K$ ein Index $j = j(x) \in I$ existiert mit $B_\epsilon(x) \subset U_{j(x)}$.

Aufgabe 7.2: Eine Exkursion ins Reich der Linearen Algebra und Numerik

Der Kompaktheitsbegriff spielt eine zentrale Rolle in der Analysis, weil er mit wesentlichen Existenzaussagen verbunden ist. Zwei sehr einfache Beispiele ergeben sich fast direkt aus der Definition von Kompaktheit: Jede stetige Funktion bildet Kompakta auf Kompakta ab, was z.B. die Existenz von Extremstellen bei reellwertigen, stetigen Funktionen gewährleistet. Ebenso existiert zu jeder Folge in einer kompakten Menge eine konvergente Teilfolge.

Im folgenden soll ein ihnen vertrautes Kompaktheitsargument dazu genutzt werden, um eine weniger naheliegende Aussage aus der Theorie der Vektorraumhomomorphismen (eine vornehme Bezeichnung für die Lineare Algebra) zu beweisen. Wie Ihnen bekannt ist, lassen sich in endlich-dimensionalen, euklidischen Vektorräumen symmetrische (selbstadjungierte) Endomorphismen diagonalisieren. Der Beweis beruht darauf, daß man zunächst durch Komplexifizierung und Anwendung des Fundamentalsatzes der Algebra (Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle) die Existenz eines Eigenvektors nachweist. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß der zu diesem Eigenvektor orthogonale Komplementärraum durch den symmetrischen Endomorphismus auf sich selbst abgebildet wird (Invarianz), läßt sich sukzessive eine Basis aus Eigenvektoren konstruieren. Da sich alle Eigenwerte dank der Symmetrie als reell herausstellen, ergibt sich schließlich die Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$.
Die entscheidende Rolle des Fundamentalsatzes, welcher die Existenz des ersten und durch wiederholte Anwendung aller weiteren Eigenwerte sicherstellt, soll in der folgenden Aufgabe von Ihnen durch ein Kompaktheitsargument ersetzt werden.

a) Es sei $A : V \to V$ ein symmetrischer Endomorphismus eines euklidischen, endlich-dimensionalen Vektorraums. Beweisen Sie, daß A einen Eigenvektor besitzt.

Anleitung: Begründen Sie, weshalb es einen Vektor z gibt, der die Ungleichung $\langle z, Az\rangle \geq \langle v, Av\rangle$ für alle $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ erfüllt. Zeigen Sie sodann, daß $Az \perp \big(\mathrm{span}(z)\big)^\perp$ und folgern Sie daraus, daß z tatsächlich ein Eigenvektor ist.

b) Die Größe $\langle v, Av\rangle$ mit $\|v\| = 1$ bzw. allgemeiner $\frac{\langle x,Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$ für beliebiges $x \neq 0$ ist unter dem Namen *Rayleigh-Quotient* bekannt und spielt bei gewissen numerischen Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten (symmetrischer Matrizen) eine Rolle. Dies wollen wir uns nun etwas genauer anschauen. Dazu betrachten wir zunächst die Potenzmethode[1] (von-Mises Iteration) zur Berechnung des betragsmäßig größten Eigenwerts einer (symmetrischen) Matrix. Der Algorithmus ist sehr einfach:

- wähle Startvektor $x^{(0)}$

[1] Eine Variante dieses Verfahrens wird u.a. von der Internet-Suchmaschine Google eingesetzt!

- iteriere: $x^{(i)} = Ax^{(i-1)}$ und berechne für eine geeignete, feste Komponente k den Quotient $q_k^{(i)} := x_k^{(i)}/x_k^{(i-1)}$

Für $i \to \infty$ konvergiert $q_k^{(i)}$ (zumindest theoretisch) gegen den betragsmäßig größten Eigenwert, falls dieser einfach ist. Gleichzeitig erhält man mit $x^{(i)}$ eine Näherung für den zugehörigen Eigenvektor. (Die Komponenten der $x^{(i)}$'s können allerdings sehr stark anwachsen, was zu numerischen Instabilitäten führen kann.) Berechnen Sie nun die Rayleigh-Quotienten zu den $x^{(i)}$'s. Ergibt sich dadurch eine Verbesserung für den genäherten Eigenwert?

Zur Erklärung ist es hilfreich, sich die Niveaulinien der Funktion $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ zusammen mit dem Einheitskreis zu veranschaulichen.

Hinweis: Teil b) ist als Programmieraufgabe (Matlab!) zu verstehen; als Beispielmatrix für A können Sie zunächst die Matrix

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix}$$

wählen, welche sich in Aufgabe 4.3 (Figur 5) ergab.

Aufgabe 7.3: Sehen Sie den Zusammenhang (zwischen den Teilaufgaben)?

Die folgenden Aussagen sind zu beweisen:

a) Eine Menge A eines topologischen (metrischen) Raums ist genau dann zusammenhängend, wenn jede *stetige* Abbildung $f : A \to \mathbb{N}$ *konstant* ist.

b) Sind A, B zwei zusammenhängende Teilmengen eines topologischen Raums und gilt $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ oder $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

c) Es seien A, B zwei Teilmengen eines topologischen Raums, welche in dem topologischen Unterraum $A \cup B$ abgeschlossen sind. Sind $A \cap B$ und $A \cup B$ zusammenhängend, so sind auch A und B zusammenhängend. Gilt die Aussage auch, falls A, B offen in $A \cup B$ sind?

Erläuterung (zur sorgfältigen Begriffsbildung): Der Begriff 'zusammenhängend' war zunächst nur für einen ganzen metrischen Raum (X, d) definiert. Da man eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raums durch Einschränken der Metrik als eigenständigen metrischen Raum $(A, d\big|_{A\times A})$ auffassen kann, läßt sich der Begriff in natürlicher Weise auch auf Teilmengen erweitern. Entsprechendes gilt in allgemeinen toplogischen Räumen vermöge der Relativtopologie, welche in jeder Teilmenge induziert wird.