Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 26. Jun., SS 2006
Abgabe : 03. Jul. bis 10 Uhr

Analysis II

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1: Kugelkoordinaten – natürlich nützlich für alle Erdbewohner!

In der Vorlesung vom 19.06.06 wurden die Polarkoordinaten eingeführt, welche insbesondere bei der Behandlung ebener, rotationssymmetrischer Probleme vorteilhaft eingesetzt werden können. Zylindrische oder sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten) stellen das Pendant im dreidimensionalen Raum dar. Zylinderkoordinaten werden vor allem dann verwendet, wenn das Problem eine axiale Rotationssymmetrie aufweist. Sie ergeben sich aus den Polarkoordinaten durch Hinzunahme einer z-Koordinate. Liegt jedoch punktale Rotationssymmetrie vor, so ist die Benutzung von sphärischen Koordinaten empfohlen. Die Kugelkoordinaten können z.B. durch folgende Transformation definiert werden, welche sie in die kartesischen Koordinaten überführt.

$$(r, \phi, \theta) \mapsto \big(r\cos(\phi)\sin(\theta), \quad r\sin(\phi)\sin(\theta), \quad r\cos(\theta)\big)$$

a) Klären Sie die Bedeutung der Koordinaten r, ϕ und θ, indem Sie die obige Transformation für spezielle Werte auswerten.

b) Bekanntlich läßt sich die Erde – freilich etwas idealisiert – als Kugel beschreiben. Daher bieten sich zur Positionsbestimmung auf der Erdoberfläche sphärische Koordinaten an, deren Ursprung man natürlich in den Erdmittelpunkt legt. Desweiteren ist es naheliegend als z-Achse (Polgerade) die Rotationsachse der Erde zu wählen. Alle weiteren Referenzpunkte, welche zur Einführung der Kugelkoordinaten benötigt werden, unterliegen im wesentlichen historischer Konvention und sind nicht sachbedingt.

   Inwiefern unterscheidet sich das Standardgradnetz auf der Erde bezüglich nördlicher (südlicher) Breite und östlicher (westlicher) Länge vom Polarwinkel θ und Azimutalwinkel ϕ, wie sie oben angegeben sind?

   Geben Sie in lokalen Koordinaten einen normierten Vektor an, der parallel zur Rotationsachse der Erde liegt. Außerdem sind jeweils zwei Vektoren in lokalen Koordinaten anzugeben, welche eine Ebene parallel zur Äquatorialebene aufspannen?

   Hinweis: Unter der Beschreibung eines Vektors in lokalen Koordinaten verstehen wir seine Komponenten in östlicher, nördlicher und vertikaler Richtung.

c) Berechnen Sie die Abstände einiger Städte (z.B. Konstanz – Ihre Heimatstadt). Falls Sie keine geographischen Positionsangaben auftreiben können, hier ein paar Beispiele:

Konstanz	:	$47° 40' N$,	$9° 11' E$
Essen	:	$51° 28' N$,	$7° 0' E$
Trier	:	$49° 45' N$,	$6° 38' E$
Paris	:	$48° 50' N$,	$2° 20' E$
Berlin	:	$52° 30' N$,	$13° 25' E$
Riga	:	$56° 53' N$,	$24° 8' E$
Kaiserslautern:		$49° 26' N$,	$7° 45' E$

   Vergleichen Sie (spaßeshalber) Ihre berechneten Luftlinienabstände mit den Entfernungsangaben für Autofahrer. Beachten Sie, daß die Erde in Wirklichkeit keine Kugel ist und sich daher auch kein eindeutiger Radius angeben läßt: Äquatorradius: 6378,160 km, Halbe Erdachse 6356,775 km. Geben Sie daher eine Abschätzung für den Fehler an.

Aufgabe 10.2: Differentialrechnung in Kugelkoordinaten

Es bezeichenen $X(r, \phi, \theta)$, $Y(r, \phi, \theta)$ und $Z(r, \phi, \theta)$ die kartesischen Koordinaten als Funktion der Polarkoordinaten.

a) Geben Sie einen möglichst kleinen (quaderförmigen) Definitionsbereich an, welcher durch die Abbildung
$$(r, \phi, \theta) \mapsto \big(X(r, \phi, \theta), Y(r, \phi, \theta), Z(r, \phi, \theta)\big)$$
surjektiv auf den $\mathbb{R}^3$ abgebildet wird. Wählen Sie sodann eine möglichst große, offene Menge als Definitionsbereich, so daß die Abbildung *injektiv* wird. Wie sieht dann das Bild aus?

b) Es sei $R(x, y, z)$, $\Phi(x, y, z)$ und $\Theta(x, y, z)$ die Darstellung der Kugelkoordinaten als Funktion der kartesischen Koordinaten, welche existiert, falls die obige Abbildung injektiv ist. Versuchen Sie die Funktionen R, Φ, Θ soweit wie möglich explizit anzugeben. Berechnen Sie $\partial_x \Phi$ als Funktion von x, y, z. Ist es möglich $\partial_x \Phi$ als Funktion von r, ϕ, θ. zu bestimmen, ohne Φ als Funktionen der kartesischen Koordinaten zu kennen?

c) Es sei f eine skalare Funktion. Geben Sie die Komponenten des Gradienten ∇f bezüglich der lokalen Basis (normierte Tangentialvektoren an die Koordinantenlinien der Kugelkoordinaten) als Funktion der Kugelkoordianten an.

d) (freiwillig) Transformieren Sie den Laplace-Operator
$$\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$
in Kugelkoordinaten.

Werbung = Information+Einladung (in eigener Sache)

Im kommenden Semester wird begleitend zur Analysis Vorlesung ein Proseminar angeboten. Unter anderem wollen wir uns damit beschäftigen, wie man eine Kugel möglichst gut auf eine Ebene projiziert (Kartenentwürfe); weitere Themen aus dem Bereich der angewandten und numerischen Mathematik sind ebenfalls geplant. Falls Ihnen Anwendungsaufgaben (wie z.B. auf den Übungsblättern 7,8 und 10) Spaß machen und Ihr Interesse wecken, falls Sie mittels Mathematik Zusammenhänge in unserer Welt verstehen wollen, sind Sie zur Teilnahme eingeladen. Beachten Sie, daß die Teilnehmerzahl jedoch aufgrund der Zeitbeschränkung des Semesters beschränkt ist.