Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 07. Nov., WS 06/07
Abgabe : 13. Nov. bis 12 Uhr

Analysis III

3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1: Wunschaufgabe (Vorteil)

In Gruppe 5 regte sich der Wunsch noch einmal intensiv das Bestimmen der Integrationsgrenzen und das Vertauschen der Integrationsreihenfolge bei Mehrfach-Integralen zu üben. Diesem Begehren sei hiermit entsprochen.

Betrachten Sie das Dreieck $\triangle \subset \mathbb{R}^2$, welches durch die Eckpunkte $(0,6),(2,2)$ und $(5,9)$ festgelegt ist. Stellen Sie seinen Flächeninhalt als Doppelintegral dar und und berechnen Sie diesen, wobei Sie die beiden möglichen Integrationsreihenfolgen durchrechnen. Welche Reihenfolge ziehen Sie vor? Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis mittels Kenntnissen aus der Vektorrechnung.

Berechnen Sie anschließend den Flächeninhalt des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ über $\triangle$.

Aufgabe 3.2: Konische Formen – Reminiszenzen an den Sommer (Pflicht)

Ach, wie schön war doch der vergangene Sommer: Eishörnchen schleckend saß man da unter einem großen Sonnenschirm, dessen Baldachin sich kegelförmig in den Himmel wölbte, und hatte Zeit die Umgebung genüßlich zu betrachten. Plötzlich fällt der Blick auf ein paar *Tipi-* und *Wigwam*-ähnliche Zelte, deren Spitzen das hohe Gras des Seeufers überragen, während der Hintergrund von der kegelstumpf-artigen Spitze eines höheren, bekannten Berges dominiert wird. Die steilen Hänge des gegenüberliegenden Seeufers scheinen von lauter Nadelhölzern bewachsen zu sein. Ihre schlanken, spitzen Baumkronen wirken wie aufgereihte Kegel, und – zu allem Überfluß – fällt einem jetzt auch noch ein, daß ihre harzigen Zapfen im Englischen und Französischen in treffender Weise als *fir cones* bzw. *cônes de sapin* bezeichnet werden. Tja, man hätte fast den Eindruck gewinnen können, die Welt sei allein aus Kegeln zusammengesetzt. Grund genug sich diesen scheinbar allgegenwärtigen Objekten endlich einmal mathematisch anzunähern.

a) Graben Sie Ihre alte Schulformelsammlung aus und verifizieren Sie die dortigen Formeln für das Kegelvolumen und die Mantelfläche mittels der mehrdimensionalen Integralrechnung.

b) Die Grundfäche eines Kegels muß nicht kreisförmig sein. Allgemein kann man Kegel über beliebigen Grundflächen betrachten. Diese ergeben sich dadurch, daß man einen Punkt, die Kegelspitze, geradlinig mit den Punkten der die Grundfläche abgrenzenden Umrandungskurve verbindet. So ist z.B. eine Pyramide ein Kegel bezüglich eines Rechtecks. Wie berechnet sich das Volumen und ggf. die Mantelfäche in diesem allgemeinen Fall?

Aufgabe 3.3: Mittlerer Erdradius (Pflicht)

In Aufgabe 10.1 (Analysis II) haben wir die Entfernung zweier Orte auf der Erde bestimmt. Dazu benötigt man den Erdradius. Da die Erde genauer betrachtet keine Kugel ist, gibt es aber gar nicht *den* Erdradius. Eine bessere Beschreibung der Erdform erhält man mit einem oblaten Rotationsellipsoid, welcher sich aus einer Kugel durch Abflachen der Polkappen und Auswulsten der Äquatorzone ergibt. Überlegen Sie sich, wie man auf sinnvolle Weise einen mittleren Erdradius definieren könnte und versuchen Sie diesen zu berechnen.

Anmerkung: Es könnte sein, daß Sie bei Ihrer Rechnung auf Integranden stoßen, deren Stammfunktionen sich nicht analytisch mittels elementarer Funktionen angeben lassen. Versuchen Sie in diesem Fall die Integrale auf Grundfromen zu bringen, die sich in einschlägigen Formelsammlungen nachschlagen lassen. Numerische Berechnungen wären ebenfalls denkbar.

Aufgabe 3.4: Weinlese – Die Kepler'sche Faßregel (Pflicht)

Nachdem auf dem letzten Übungsblatt die Biertrinker unter Ihnen auf ihre Kosten gekommen sind (hoffentlich wurde nicht zu viel von dem gelb-braunen Gesöff verschüttet), soll diese Aufgabe besonders die Weintrinker amüsieren, ganz passend zur Jahreszeit, denn: Die Weinlese dürfte abgeschlossen sein, der erste Eiswein kann wohl ebenfalls schon geerntet werden und in einer guten Woche gibt es bereits den *Beaujolais primeur* als ersten Neuwein des Jahres (3. Donnerstag im November laut Wikipedia).
Bekanntlich muß der Wein in (Eichen)fässern reifen. Daher rührt unsere Motivation, uns einmal mit der Volumenmessung von Fässern zu beschäftigen, wie es vor Jahrhunderten schon der aus der Astronomie bekannte Johannes Kepler getan hat, als die Integralrechnung noch in ihren absoluten Kinderschuhen steckte.
Bevor es an die Arbeit geht noch eine lustige Anekdote zum Stichwort *Faß* als kleine Aufmunterung.

> Einst gab es an einem Gymnasium einen sehr korpulenten, um nicht zu sagen dicken Mathematiklehrer. Aufgrund seiner enormen Körperfülle nannten ihn alle Schüler *das Faß*. Eines Tages erblickte dieser Lehrer beim Betreten des Klassenzimmers der Unterprima die Zeichnung eines Fasses an der Tafel. Gespanntes Schweigen erfüllte den Raum. Wie würde der Lehrer wohl reagieren? "Dieses Faß soll wohl mich portraitieren", begann er,"in der Tat, die Karikatur ist fast gelungen. Nur ein wesentliches Detail hat der Künstler offensichtlich nicht beachtet. Dieses Faß ist von Reifen umgeben – ich aber bin von Unreifen umgeben."
>
> Seitdem hat kein Schüler mehr die Lust verspürt, den Lehrer durch ein erneutes Portrait herauszufordern.

Betrachten Sie das Faß als einen zylinderähnlichen Rotationskörper, dessen Seitenwand im Querschnitt nicht durch eine senkrechte Gerade (wie beim Zylinder) sondern durch einen Kreisbogen dargestellt wird.

a) Berechnen Sie das Volumen eines Fasses mittels der Formel für Rotationskörper.

b) Bestimmen Sie abermals das Volumen durch Berechnung eines Dreifachintegrals.

c) Wie bereits erwähnt, war die Integralrechnung zu Keplers Zeiten nur sehr rudimentär entwickelt, so daß der gute Mann nicht so leicht wie Sie a) und b) hätte lösen. Da er aber schlau war, ersann er folgende Formel, welche – wie Sie nachprüfen sollen – eine recht präzise Annäherung liefert:

$$V \approx \frac{h}{6}\Big(Q(0) + 4Q(h/2) + Q(h)\Big)$$

Das Volumen eines Fasses kann demnach aus der Kenntnis seiner Höhe h sowie der Boden- und Deckelfäche, $Q(0)$ bzw. $Q(h)$, und der Querschnittsfläche in halber Höhe $Q(h/2)$ berechnet werden. Bei kreisförmigen Querschnitten lassen sich die Querschnittsflächen (insbesondere $Q(h/2)$) z.B. bequem aus einer Umfangsmessung berechnen. Wie erleichtert mag der ein oder andrere Winzer gewesen sein, dank der Formel das Volumen eines Fasses im Handumdrehen berechnen zu können, ohne es mühevoll mit Wasser zu füllen und zu schauen wieviel hineingeht.

Unter welchen Umständen ist die Formel besonders genau?

Zahlenbeispiele etc. denken Sie sich bitte selbst aus. Die Aufgabe wird demnächst fortgesetzt.