Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Nov., WS 06/07
Abgabe : 06. Dez. bis 10 Uhr

Analysis III

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1: Auf der Rutsche (Pflicht)

Ein Teilchen gleitet die 'Arkustangens-Rutsche' hinab und beschreibt dabei folgende Kurve

$$\mathbb{R}_0^+ \ni t \mapsto x(t) = \begin{pmatrix} \sigma(t) \\ H\big(\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{\sigma(t)}{\epsilon})\big) \end{pmatrix}.$$

Hierbei sind die Konstanten H, ϵ (Bedeutung?) als positiv anzusehen und $\sigma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ bezeichnet eine streng monoton wachsende Funktion. Welcher Kraft ist das Teilchen der Masse m während der Rutschpartie ausgeliefert (siehe Definition aus der Vorlesung)?
Angenommen es gäbe die Arkustangens-Rutsche wirklich auf einem Spielplatz und Sie wären Mechanik-begeistert. Könnten Sie die Funktion σ genauer bestimmen?

Aufgabe 6.2: Separable Differentialgleichungen (Pflicht)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung zu den folgenden Differentialgleichungen, d.h. die Lösungen sind für beliebige Anfangswerte aus $\mathbb{R}$ zu diskutieren.

i) $\dot{x} = tx$ ii) $\dot{x} = t^3/x^2$ iii) $\sqrt{1-t^2}\dot{x} + \sqrt{1-x^2} = 0$ iv) $t(x^2+1) + x(t^2+1)\dot{x} = 0$

Aufgabe 6.3: Werkgruppe: Basteln einer Funktion nach Maßgabe (Pflicht)

a) Was bedeutet *lokal Lipschitz-stetig*. Geben Sie eine präzise Definition an.

b) Es sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^m)$. Warum erfüllt f die lokale Lipschitz-Bedingung.

c) **(Function wanted!)** Geben Sie eine ganz konkrete $\mathcal{C}_0^\infty$-Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an, welche folgenden Bedingungen genügt:

$$\text{i) } \phi|_{B(0,\epsilon)} = 1 \quad \text{und} \quad \text{ii) } \phi|_{\complement B(0,2\epsilon)} = 0.$$

Das $\complement$ deutet die Komplementärmenge an. **Tip:** Falls Sie keine Idee haben, wie man eine derartige Funktion basteln könnte, dann schauen Sie sich mal die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \exp(-1/x^2) & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$$

genauer an.

d) Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Zeigen Sie, daß dann die Produktfunktion ϕf global Lipschitz stetig ist.

Aufgabe 6.4: Malgruppe: Zeichnen von Phasenportraits (Pflicht)

Betrachten Sie die beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\text{i) } \ddot{x} = -x, \qquad \text{ii) } \ddot{x} = \frac{\dot{x}^2 - 1}{x}.$$

Finden Sie mittels des Satzes von Picard-Lindelöf heraus, für welche Anfangswerte das zugehörige Anfangswertproblem möglicherweise keine eindeutige Lösung besitzt. Versuchen Sie anschließend die Differentialgleichungen ggf. durch Raten zu lösen. (Denken Sie vor allem bei i) an die Winkelfunktionen!)

Tragen Sie für einige Lösungen und hinreichend viele Zeitpunkte t die Tupel $\big(x(t), \dot{x}(t)\big)$ in ein kartesisches Koordinatensystem, wobei für jede Differentialgleichung eine separate Skizze anzufertigen ist. Eine derartige Veranschaulichung der Lösungen wird als *Phasenporträt* bezeichnet. Was für Kurven ergeben sich?

Hier noch ein paar Aufgaben für Freundinnen und Freunde abstrakterer Probleme ohne direkt erkennbaren Anwendungsbezug. Mindestens an einer sollte sich jeder versuchen!

Aufgabe 6.5: Ein Fixpunktsatz (Vorteil & WAVE)

Es sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und $f : K \to K$ eine *kontraktive* Abbildung mit

$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y).$$

Zeigen Sie, daß f dann genau einen Fixpunkt besitzt. Welcher Fixpunktsatz wird durch die obige Aussage (scheinbar) verallgemeinert?

Aufgabe 6.6: Isometrien auf Kompakta (Vorteil & WAVE)

Zeigen Sie, daß jede Isometrie auf einem kompakten metrischen Raum surjektiv sein muß. Müssen Isometrien Fixpunkte besitzen? Finden sie Beispiele und/oder Gegenbeispiele.

Aufgabe 6.7: Isometrien im $\mathbb{R}^n$ (Vorteil & WAVE)

Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie bezüglich der euklidischen Norm (d.h. $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$), so ist T affin-linear.

Es muß (leider) hinzugefügt werden, daß diese Aufgabe für die Physik wichtige Konsequenzen hat.