Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 19. Dez., WS 06/07
Abgabe : 10. Jan. bis 10 Uhr

Analysis III

9. Übungsblatt

Aufgabe 9.1: Umgang mit komplexen Zahlen (Pflicht)

a) Machen Sie sich im Umgang mit den komplexen Zahlen vertraut. Verifizieren Sie die folgenden Identitäten für $x \in \mathbb{R}$ und verinnerlichen Sie diese samt Begründung. Sie dürfen diese Formeln durchaus in den Rang einer "Mitternachtsformel" (oder noch höher) erheben.

i) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}, \qquad \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

ii) $\cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}), \qquad \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})$

iii) $\cosh(x) = \cos(\mathrm{i}x), \qquad \sinh(x) = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)$

Beachten Sie, daß sin und cos aufgrund ihrer absoluten Konvergenz auch im Komplexen sinnvoll durch ihre Potenzreihen definiert werden.

b) Zeigen Sie, daß die quadratische Gleichung $z^2 = a,\ a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau zwei Lösungen hat.

Hinweis: Es macht sicherlich wenig Sinn, dieses kleine Übungsaufgäbelchen mit einem schweren Geschütz wie dem Fundamentalsatz der Algebra zu erschlagen (warum?). Versuchen Sie es beispielsweise mit der Polardarstellung zu erle(di)gen.

c) **Kurioses:** Nehmen wir an, wir bezeichneten diejenige Lösung der quadratischen Gleichung $z^2 = a$ mit $\sqrt{a}$, welche einen nicht-negativen Imaginärteil besitzt. Die Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ sind i und $-$i (wieso?), so daß $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$. Was sagen Sie zu der folgenden 'Gleichung'?

$$1 = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$$

Aufgabe 9.2: Lassen Sie die Jordan-Normalform nicht über'n Jordan gehen! (Pflicht)

Wie in der Vorlesung angeklungen spielt die Jordan-Normalform eine wesentlich Rolle bei der Berechnung von Exponentialmatrizen und somit bei der Lösung linearer Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten. Dabei ist nicht nur die Jordan-Normalform der Koeffizientenmatrix zu ermitteln sondern auch die zugehörigen Transformationsmatrizen sind zu bestimmen (warum?).

Berechnen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -2 & 9 & 3 \end{pmatrix},$$

sowie anschließend die entsprechenden Exponentialmatrizen; insbesondere hierfür ist die Kenntnis der Transformationsmatrizen erforderlich.

Hinweis: Um Ihnen das Rechnen zu erleichtern, wurde die Matrix B so gewählt, daß die Transformationsmatrix und ihre Inverse nur ganzzahlige Koeffizienten besitzen. (Wie kann man so etwas erreichen?) Auch bei den Eigenwerten handelt es sich um recht kleine ganze Zahlen.
Falls Sie nicht sofort wissen, wie der Rechenweg funktioniert, ist es sinnvoll rückwärts zu denken. Betrachten Sie dazu eine allgemeine Situation und tun sie so, als ob Ihnen die Jordan-Normalform bekannt

sei. Welche Beziehungen ergeben sich dann zwischen den kanonischen Basisvektoren. Bringen Sie dann die Transformationsmatrix ins Spiel.
Wem dieser Hinweis nicht ausreicht und/oder wer sich von den Kenntnissen aus der Linearen Algebra gerade komplett im Stich gelassen fühlt, dem sei das Ergänzungsblatt zur Jordan-Normalform anempfohlen, das demnächst von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden kann.

Aufgabe 9.3: Malgruppe: nochmals Phasenportraits **(WAVE)**

Die folgende Aufgabe ermutigt Sie zu einer kreativen Beschäftigung an langen Winterabenden mit notorisch langweiligen Fernsehprogrammen.

Betrachten Sie das 2×2 Differentialgleichungssystem zu den reellen Zahlen a, b, c, d:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Phasenportrait ergibt sich, indem Sie für verschiedene Anfangswerte $\binom{\overline{x}_1}{\overline{x}_2} \in \mathbb{R}^2$ die Kurven $\mathbb{R} \ni t \mapsto \binom{x_1(t)}{x_2(t)}$ in ein $x_1 x_2$-Koordinatensystem zeichnen. Dabei ergeben sich je nach Wahl der vier Koeffizeneten a, b, c, d ganz unterschiedliche Bilder z.B. Quellen, Senken, Wirbel und Sattel.
Ihre Aufgabe besteht darin, in der Vielfalt der verschiedenen Phsenportraits eine qualitative Klassifikation durchzuführen. Dies läuft letztendlich auf eine klassifizierende Untersuchung der reellen 2×2 Matrizen hinaus (Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit etc.).