Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Prüfungstag: 12.10.2006

Klausur

zur

Schriftlichen Vordiplomsprüfung

Analysis I + II

4. Iteration

Die Bearbeitungszeit beträgt 210 Minuten, also dreieinhalb Stunden.
Bitte beachten Sie umseitig die formalen Hinweise.

Aufgabe 0: Lockerungsübung (6 Punkte)

a) Summieren Sie die natürlichen Zahlen von 1 bis 40.

b) Wie sieht das Binom $(a+b)^7$ in ausmultiplizierter Form aus (explizite Angabe der Koeffizienten)?

c) Geben Sie den Wert der unendlichen Summe an: $\sum_{k=0}^{\infty} 0.125^k$.

d) Bestimmen Sie das Integral: $\int_0^{2\pi} e\cos(x)\mathrm{d}e$.

e) Erinnern Sie sich noch an den Trick mit dem geschickten Erweitern? Begründen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\big(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\big)$. Wie steht es bezüglich absoluter Konvergenz?
Tip: Falls Sie trotz Erweitern nicht weiterwissen, wie Sie die Konvergenz begründen sollen: Da gab es doch ein Leibniz-K... . Nein, nicht Keks!

Aufgabe 1: Schranken und Folgen (6 Punkte)

a) Definieren Sie die Begriffe *obere Schranke* und *untere Schranke* einer nicht-leeren Menge $A \subset \mathbb{R}$.

b) Sei $a_n = 2^{(-1)^n n}$ und $A = \{a_n |\ n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie: A besitzt keine obere Schranke ist aber nach unten beschränkt. Geben Sie das *Infimum* an. Die Antwort ist kurz zu begründen.

c) Berechnen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$:

$$\text{i)}\ \frac{3n^2+4n-1}{2n+4n^2+5} \qquad\qquad \text{ii)}\ \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

Aufgabe 2: Konvergenzuntersuchung (8 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x+3}{x+5}$ und die Folge $a_{n+1} = f(a_n)$ mit $a_0 = 1$.

a) Berechnen Sie die Ableitung f'; zeigen sie damit, daß f eine Kontraktion ist.

b) Begründen Sie die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ unter Anwendung eines namhaften Satzes aus der Vorlesung (Analysis II).

c) Rechnen Sie den Grenzwert aus.

d) Wie oft muß höchstens iteriert werden, damit die Folgenglieder den Grenzwert bis auf einen Fehler kleiner 10^{-6} approximieren?

Aufgabe 3: Zur Differential- und Integralrechnung (9 Punkte)

a) Leiten Sie unter Zuhilfenahme weiterer Differentiationsregeln die Ableitungsformel für Potenzen mit *positiven rationalen* Exponenten her:

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^q = qx^{q-1} \quad \text{mit } q \in \mathbb{Q}^+.$$

Die entsprechende Ableitungsregel für $q \in \mathbb{N}$ darf vorausgesetzt werden.

b) Finden Sie eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1\big([0,\infty)\big)$ mit $f(x) \neq 0$ für $x > 0$, welche die Integralgleichung $f^2(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ löst. Leiten Sie dazu die Gleichung zunächst ab.

c) Es sei $f \in \mathcal{C}^1\big([a,b]\big)$ und $f(a) = f(b) = 0$. Zeigen Sie:

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

Aufgabe 4: Exkursion in Metrische Räume (7 Punkte)

Im folgenden sei (M,d) ein metrischer Raum.

a) Was bedeutet die Sprechweise, daß M *vollständig* ist?

b) (1 Sonderpunkt) Wie beeinflußt die Vollständigkeit von M die Vollständigkeit des Raumes $\mathcal{C}_b(M,\mathbb{R})$?

c) Definieren Sie in der Quantorenschreibweise den Begriff *Cauchyfolge*.

d) Beweisen Sie die *untere Dreiecksungleichung*: $\big|d(x,y) - d(y,z)\big| \leq d(x,z)$

e) Verifizieren Sie die *Vierecksungleichung*: $\big|d(x,y) - d(u,v)\big| \leq d(x,u) + d(y,v)$.

f) Benutzen Sie die letztere Ungleichung zum Beweis der folgenden Behauptung: Es seien $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ zwei Cauchyfolgen in M. Dann konvergiert die Folge $\big(d(x_n,y_n)\big)_n$ in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 5: Monsieur *Lagrange* vous aide à remplir *la grange.* oder
Herr Lagrange hilft Ihnen das Punktekonto (Scheune) zu füllen. (8 Punkte)

a) Minimieren Sie das Abstandsquadrat des Punktes $(1,0)$ über der Menge M

$$M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big|\ \tfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1\big\}.$$

b) Eigentlich interessiert nicht das Abstandsquadrat sondern der Abstand. Warum ist es erlaubt, statt der Abstandsfunktion den quadrierten Abstand zu optimieren? Begründen Sie, daß beide Funktionen dieselben Maxima und Minima besitzen. Warum ist es sinnvoll mit dem Abstandsquadrat zu rechnen?

c) Welches geometrische Objekt wird durch M beschrieben (Skizze)?

Aufgabe 6: Kinematische Kurven – Abwickeln eines Kabels (11 Punkte)

a) Wie ist die Bogenlänge einer $\mathcal{C}^1$-Kurve definiert?

b) Es sei $\mathbf{t} : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ das Tangentialvektorfeld einer $\mathcal{C}^2$-Kurve $\boldsymbol{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$. Es gelte in der euklidischen Norm $\|\mathbf{t}(s)\| = 1$ für alle $s \in [a, b]$. Welche Bedeutung kommt unter diesem Umstand dem Parameter s im Hinblick auf a) zu? Warum gilt außerdem: $\mathbf{t}(s) \perp \mathbf{t}'(s)$?

   Tip zur zweiten Frage: Denken Sie an den Zusammenhang von euklidischer Norm und dem Standard-Skalarprodukt. Wie lassen sich damit die Voraussetzung $\|\mathbf{t}(s)\|^2 = 1$ und die Behauptung schreiben?

c) Die Standardparametrisierung des Einheitskreises ist bekanntlich $\phi \mapsto \binom{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}$. Parametrisieren Sie einen Kreis vom Radius r um den Ursprung so, daß der Tangentialvektor an jeder Stelle die Länge 1 besitzt.

d) Von einer feststehenden Kabeltrommel mit Radius r wird eine Umwicklung eins dünnen Drahtes abgewickelt. Der Draht sei dabei stets geradlinig gespannt, so daß das bereits abgewickelte Stück praktisch tangential zum kreisförmigen Trommelquerschnitt verläuft. Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve an, welche durch das Kabelende beschrieben wird.

e) Es sei $\boldsymbol{\beta} : I \to \mathbb{R}^2$ eine Kurve, welche die Tangenten der Kurve $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\|\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}(s)\| = 1$ für alle $s \in I$ in senkrechtem Winkel schneide. Zeigen Sie

$$\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\alpha}(s) + (c - s)\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

   Welche Funktion kommt der Konstanten c zu?

Wichtiger Hinweis: Falls Sie nicht imstande sind d) direkt zu lösen, können Sie die Formel in e) dazu nutzen. Warum?

Aufgabe 7: Anwendung von Satz über Umkehrfunktion und Kettenregel (6 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$T(\theta, \phi) = \big(\cosh(\theta)\cos(\phi), \sinh(\theta)\sin(\phi)\big)$$

T sei in einer Umgebung U von (θ_0, ϕ_0) invertierbar. $f : U \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(\theta, \phi) = \theta^2 - \phi$. Ferner sei $F := f \circ T^{-1}$ und $(x_0, y_0) := T(\theta_0, \phi_0)$. Bestimmen Sie $\partial_2 F(x_0, y_0)$. Sie können dabei folgendermaßen vorgehen:

a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen von f und T an der Stelle (θ_0, ϕ_0).

b) Geben Sie die Jacobi-Matrix von T^{-1} an der Stelle (x_0, y_0) an.

c) Berechnen Sie die gesuchte Größe.

Hinweise zur Bearbeitung der Klausur

(bitte sorgfältig lesen)

- Schalten Sie Ihr Handy aus – wenn Sie während der Klausur in- oder außerhalb des Hörsaals beim Telefonieren angetroffen werden, so wird dies als Täuschungsversuch gewertet.
- Es sind keine Hilfsmittel wie Taschenrechner,Vorlesungsskript, Merkblätter etc. zugelassen.
- Tragen Sie Name und Matrikelnummer auf <u>jedem</u> Blatt ein.
- Sie können Vorder- und Rückseiten benutzen, aber Antworten zur Aufgabe **N** <u>immer nur</u> auf Blättern zur Aufgabe **N** schreiben.
- Wenn bei einer Aufgabe der Platz nicht ausreicht, können Sie zusätzliche Blätter erhalten – schreiben Sie sowohl die Nummer der Frage als auch Name und Matrikelnummer oben auf das Zusatzblatt.
- Konzeptpapier wird ebenfalls gestellt. Versuchen Sie sauber zu schreiben und geben Sie keine Schmierblätter ab.
- Bei fast allen Aufgaben können die Teilaufgaben unabhängig voneinander bearbeitet werden; lassen Sie sich also nicht entmutigen, wenn eine Teilaufgabe nicht klappt.
- Kommentieren Sie Ihre Rechnungen ausführlich; im Zweifel besser mehr als zu wenig. Resultate aus der Vorlesung bzw. aus den Übungen dürfen mit Verweis ohne Begründung verwendet werden.
- Die Bearbeitungszeit für die Klausur beträgt 210 Minuten ($3\frac{1}{2}$ Stunden).

Viel Erfolg!

Eine Musterlösung kann auf Wunsch im Internet bereitgestellt werden.