



Analysis III

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1: Testen Sie den Reduktionssatz (Fubini für R-Integrale) (Pflicht)

Berechnen Sie die folgenden Integrale, wobei Sie zuerst nach x und dann nach y integrieren und die Rechnung anschließend mit vertauschter Integrationsreihenfolge wiederholen.

- $\int_R (2x + 3) d(x, y)$ mit $R := [0, 2] \times [3, 4]$
- $\int_R (xy + y^2) d(x, y)$ mit $R := [0, 1] \times [0, 2]$
- $\int_R \exp(x + y) d(x, y)$ mit $R := [\pi/2, \pi] \times [0, \pi/2]$

Zum Nachdenken: Welchen Satz aus der Analysis II würden Sie mit dem Reduktionssatz am ehesten in Verbindung bringen?

Aufgabe 1.2: Volumen eines Tetraeders (3-Simplex) (Pflicht)

Es seien $a, b, c > 0$. Betrachten Sie die Punkte $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ und $(0, 0, c)$, welche im \mathbb{R}^3 eine Ebene \mathcal{E} definieren.

- Definieren Sie die Menge aller Punkte V , welche sich zwischen \mathcal{E} und den drei Koordinatenebenen befinden. Also $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \dots\}$.
- Haben Sie eine konkrete Vermutung, nach welcher Formel sich der Inhalt (Volumen) von V berechnet (Schulwissen!). Versuchen Sie Ihre Vermutung mittels Integralrechnung zu bestätigen.
- Berechnen Sie $\int_V x^2 y d(x, y, z)$.
- Führen Sie b) und c) unter Verwendung der Substitutionsregel (Transformationsformel) durch (Integration über den Einheitssimplex).

Aufgabe 1.3: Eine Ungleichung (Vorteil)

Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und positiv. Beweisen Sie die folgende Ungleichung:

$$\left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \right) \geq (b - a)^2.$$

Warum ist die Ungleichung so "witzig"?

Aufgabe 1.4: Pathologische Funktion gesucht! (WAVE)¹

Denken Sie sich eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aus, die in allen irrationalen Punkten stetig in allen rationalen Punkten aber unstetig ist. Ist diese Funktion Riemann-integrierbar?

Die Diskussion wird eventuell im MEGA fortgeführt.

Falls die Zeit ausreicht, wird in den ersten Übungsstunden die Vordiploms-Klausur besprochen.

¹Wiederholen \rightarrow Anwenden \rightarrow Vertiefen \rightarrow Ergänzen