Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 10. Mai, SS 07

Analysis IV

3. Übungsblatt

Aufgrund des Feiertags am 17. Mai ist es noch unklar, wie der Übungsbetrieb nächste Woche ablaufen wird. Der genaue Abgabetermin wird daher erst später bekanntgegeben. Zumindest ein Teil der Übungen sollte bis zum kommenden Mittwoch bearbeitet sein.

Aufgabe 3.1: Beispiel eines Maßes

Auf dem Ring $\mathbb{A}_1$ der endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Intervalle (linksseitig offen, rechtsseitig abgeschlossen) läßt sich ein Inhalt definieren, indem man für Intervalle

$$\mu\big((a,b]\big) := H(b) - H(a), \qquad H(x) := \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

setzt und Additivität fordert. Läßt sich μ mit dem Satz von Carathéodory zu einem Maß auf $\sigma(\mathbb{A}_1) = \mathscr{B}(\mathbb{R})$ fortsetzen. Kennen Sie das Maß?

Aufgabe 3.2: Wiederholung & Ergänzung der Vorlesung

a) Zeigen Sie, daß die Menge aller meßbaren Mengen bzgl. eines äußeren Maßes μ eine σ-Algebra bildet.

b) Welche Rolle spielen die Dynkin-Systeme? (ausführliche Begründung)

Aufgabe 3.3: Beweisaufgaben zum äußeren Maß

Im folgenden sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge X. Folgende Aussagen sind zu beweisen:

0) Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.

a) Es sei $M \subset X$ meßbar und $B \subset X$ beliebig, dann gilt:

$$\mu(B \cup M) + \mu(B \cap M) = \mu(B) + \mu(M)$$

b) Für eine Folge von Teilmengen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty$. Dann ist die Menge

$$\big\{x \in X \mid x \in A_n \text{ für unendlich viele } n \in \mathbb{N}\big\}$$

eine Nullmenge.

Die folgende Aussage greift eine Frage aus Gruppe 2 auf: Ist ein äußeres Maß ebenfalls σ-additiv, obwohl nur die σ-Subadditivität gefordert ist?

c) Es sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen in X; ferner sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge disjunkter meßbarer Mengen derart, daß $A_n \subset M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Im Folgenden geht es um eine **Charakterisierung (nicht-)meßbarer Mengen**. Haben Sie eine anschauliche Vorstellung zu den nachstehenden Aussagen, von denen Sie mindestens eine zu beweisen versuchen sollten?

d) Es sei $A \subset X$ nicht-meßbar und M eine meßbare Obermenge von A. Dann gilt $\mu(M \setminus A) > 0$.

e) Eine Menge $S \subset X$ ist genau dann meßbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine meßbare Menge $M \subset S$ gibt mit $\mu(S \setminus M) < \epsilon$.

f) Falls $S \subset X$ die Eigenschaft besitzt, daß zu jedem $\epsilon > 0$ eine meßbare Menge M existiert mit $\mu(S \triangle M) < \epsilon$, so ist S meßbar.