Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 14. Jun., SS 07
Abgabe : 20. Jun. bis 12 Uhr

Analysis IV

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1: Nachlese aus Vorlesung & Übungen

a) Begründen Sie, warum mit $f, g \in \mathscr{L}^p$ auch $f + g \in \mathscr{L}^p$ ist. Beweisen Sie anschließend die Minkowski'sche Ungleichung.

b) Zeigen Sie, daß sich die in $\mathscr{L}^p$ definierte Äquivalenzrelation $\sim$ (Gleichheit fast überall) mit der Additionsverknüpfung in $\mathscr{L}^p$ verträgt, so daß in der Menge der Äquivalenzklassen $L^p = \mathscr{L}^p/\sim$ ebenfalls eine Addition in natürlicher Weise definiert ist.

c) (Probleme nicht unter den Teppich kehren sondern klären.) Die Behauptung von 5.1b) läßt sich beweisen, indem man o.B.d.A. annimmt, daß die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufsteigend ist, andernfalls wäre $(-f)_{n\in\mathbb{N}}$ zu betrachten. Um den *Satz von der monotonen Konvergenz* einzusetzen, geht man zur Folge $(f_n - f_1)_{n\in\mathbb{N}}$ über, die ebenfalls aufsteigend ist, deren Glieder aber nicht-negativ-wertig sind. Es ergibt sich dann folgender Rechengang:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int (f_n - f_1) &= \int \lim_{n\to\infty}(f_n - f_1) \\
\lim_{n\to\infty}\int f_n - \int f_1 &= \int \big(\lim_{n\to\infty} f_n - f_1\big) \\
\lim_{n\to\infty}\int f_n - \int f_1 &= \int \lim_{n\to\infty} f_n - \int f_1
\end{aligned}$$

Durch Addition von $\int f_1$ auf beiden Seiten ergäbe sich nun die Behauptung.

In Gruppe 1 wurde folgender Einwand laut: Die Linearität des Lebesgue Integrals wurde in der Vorlesung nur für *integrable* Funktionen bewiesen. Da *a priori* nicht klar ist, daß die Grenzfunktionen $\lim_{n\to\infty} f_n$ bzw. $\lim_{n\to\infty}(f_n - f_1)$ integrabel sind, auch wenn die f_n's als integrabel vorausgesetzt werden, ist es fraglich, ob das Integral auf der rechten Seite von der zweiten zur dritten Gleichung auseinandergezogen werden kann.

Nehmen Sie dazu Stellung.

d) (Analysis I nicht geringschätzen.) Aufgabe 5.3) wurde trotz zweiwöchiger Bearbeitungszeit überwiegend nicht sorgfältig bearbeitet. Der Sinn der Aufgabe besteht aber weniger im Berechnen der Integrale (deren Werte man mit bloßem Auge erkennen kann), sondern in einer minutiösen Rechtfertigung kritischer Rechenschritte. Insbesondere für Lehramtskandidaten empfiehlt es sich, dies nachzuholen. Zwecks einer besseren Vertrautwerdung mit der Exponentialfunktion, Binomialkoeffizienten etc. sind Verweise auf Analysis I zu vermeiden.

Aufgabe 6.2: Vervollständigung des Vollständigkeitsbeweises: Der Fall L^∞

In der Vorlesung wurde bereits der Beweis zur Vollständigkeit der L^p-Räume mit $1 \le p \le \infty$ vorgeführt. Tragen Sie nun den entsprechenden Beweis für L^∞ nach. Zeigen Sie dazu, daß jede Cauchyfolge in $\mathscr{L}^\infty$ außerhalb einer Nullmenge punktweise konvergiert. Warum ist L^∞ dann vollständig?

Hinweis: Orientieren Sie sich beim Beweis weniger an den Fall der L^p-Räume ($1 \le p \le \infty$) als an den Fall der stetigen beschränkten Funktionen ($\to$ Übungsaufgabe Analysis II).

Aufgabe 6.3: Doppelt gemoppelt hält besser: nochmals Integral der sinc-Funktion

Benutzen Sie den *Satz von Fubini* und die Beziehung $x^{-1} = \int_0^\infty e^{-xt}dt$ um abermals das uneigentliche Riemann Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

zu berechnen.

Bemerkung: Neben dem Stellen von Übungsaufgaben besitzt die Funktion $x \mapsto \text{sinc}(x) := \frac{\sin x}{x}$ (auch als *Sinus cardinalis* bekannt) weitere Anwendungen, z.B. bei der Berechnung von Beugungsgittern oder in der Signaltheorie (Abtatsten von Signalen, Digitalisierung). Die Kenntnis des obigen Integrals ist daher von natürlichem Interesse. Weitere Information findet man z.B. auf den Wikepedia Seiten unter dem Stichwort "sinc-Funktion".

Aufgabe 6.4: Fresnelsche Integrale

Die *Fresnel Integrale* sind ebenfalls in der optischen Beugungstheorie von Bedeutung:

$$F_C := \int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x, \qquad F_S := \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x.$$

Ferner spielen die Integrale mit variabler Obergrenze bei der Auslegung von Kurven im Eisenbahn- und Straßenbau eine wichtige Rolle. Es mag spinnerisch anmuten, aber die Kurven würden wohl auf Deutsch Spinnkurven heißen, hätte sich nicht die wohlklingende, dem Griechischen entlehnte Bezeichnung *Klothoide* eingebürgert. Schauen Sie mal unter diesem Stichwort bei Wikipedia nach, bevor Sie mit dem Rechnen loslegen; vielleicht erschließt sich Ihnen dann eine sehr konkrete Bedeutung der obigen Integrale.

a) In welchem Sinne sind die obigen Integrale zu interpretieren?

b) Zeigen Sie: $F_C = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x^2}\mathrm{d}x$.

c) Versuchen Sie die Integrale zu berechnen.

   Bemerkung: Wer nach etlichen Theorieaufgaben etwas Abwechselung sucht, darf sich hier gern auf das trickreiche Berechnen derartiger uneigentlicher Integrale konzentrieren, deren Integranden keine mittels Standardfunktionen analytisch darstellbare Stammfunktion besitzen. Es sei jedoch daran erinnert, daß Rechenschritte wie das Vertauschen von Grenzwerten (insbesondere das Permutieren der Integrationsreihenfolge) auf ihre Zulässigkeit überprüft werden müssen; ansosnten kann die Rechnung in die Irre laufen.

Aufgabe 6.5: Nachdenkliches: Der Vorteil des Monsieur Lebesgue. (Diskussionsaufgabe)

Es wird behauptet, daß das Lebesgue Integral ob seiner mächtigen Konvergenzeigenschaften dem Riemann Integral vorzuziehen ist. Vielleicht läßt sich diese Aussage an Folgendem ein Stück weit konkretisieren: Versuchen Sie den nachstehenden Satz mit und ohne Zuhilfenahme von Sätzen aus der Lebesgueschen Maß- Integrationstheorie zu beweisen:

Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[0,1]$, derart daß $0 \le f_n(x) \le 1$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$