Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 21. Jun., SS 07
Abgabe : 27. Jun. bis 12 Uhr

Analysis IV

7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1: Aufarbeiten & Wiederholen

a) (für Gruppe 1) Zeigen Sie für allgemeine $p \in [1,\infty)$: $f, g \in \mathscr{L}^p$ impliziert $f + g \in \mathscr{L}^p$. Starten Sie mit folgender Ungleichung:

$$\big|f(x) + g(x)\big| \;\le\; |f(x)| + |g(x)| \;\le\; 2\max\big\{|f(x)|, |g(x)|\big\}.$$

Warum ist es sinnvoll, mit dem Maximum zu argumentieren, bevor man die Ungleichung in die p-te Potenz erhebt. Warum ist der Nachweis für die obige Implikation separat zu erbringen quasi als Vorbereitung des Beweises der Minkowskischen Ungleichung?

b) (für Gruppe 1) Die Ungleichung vom geometrisch-arithmetischen Mittel erweist sich als nützlich, um das Monotonieverhalten der Folge

$$n \mapsto (1 + \tfrac{x}{n})^n$$

für $x \in \mathbb{R}$ nachzuweisen. Versuchen Sie Ihre Vermutung zu beweisen, um mit Gruppe 2 gleichzuziehen.

c) (für Gruppe 2) Beschäftigen Sie sich nochmals mit Aufgabe 6.1c). Führen Sie die Fallunterscheidung durch, daß $f_n - f_1$ entweder integrierbar ist oder nicht und diskutieren Sie den zweiten Fall.

d) Gehen Sie sorgfältig die Berechnung der uneigentlichen Integrale durch (siehe entsprechende Aufgaben auf Blatt 5 und 6). Fassen Sie die Argumentation zusammen, welche den Rechnungen jeweils zugrunde liegt. Wie wird von den verschiedenen Integralbegriffen Gebrauch gemacht? An welcher Stelle kommen Konvergenzsätze bzw. der Satz von Fubini zum Einsatz? Überprüfen Sie die Voraussetzungen um die Anwendung der Theoreme zu rechtfertigen.

Aufgabe 7.2: Verwickelte Inklusionsbeziehungen zwischen L^p-Räumen

Beweisen Sie die folgenden Ausssagen bzw. versuchen Sie die Fragen zu beantworten und/oder an Beispielen zu illustrieren:

a) Auf endlichen Maßräumen gilt für $0 < \alpha < \beta \le \infty$: $L^\beta \subset L^\alpha$. Dagegen gilt $\ell^\alpha(\mathbb{N}) \subset \ell^\beta(\mathbb{N})$.

Begründen Sie anhand von Beispielen, warum die entsprechend umgekehrten Inklusionen nicht gelten bzw. warum die Voraussetzung *endliche Maßräume* notwendig ist.

b) In jedem Maßraum gilt für $0 < \alpha < \beta \le \infty$: $L^\alpha \cap L^\infty \subset L^\beta \cap L^\infty$.

Können Sie diese Aussage verallgemeinern bzw. ergänzen?

c) (Rechtfertigung des Begriffs ∞-Norm) Auf einem endlichen Maßraum gilt für alle $f \in L^\infty$:

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

d) Falls $f \in L^p$ für alle $p \ge p_0$ und falls $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p$ existiert, welchen Wert nimmt dann der Limes an?

e) Im allgemeinen gilt $L^\infty \ne \bigcap_{p>1} L^p$. Gibt es Fälle in denen Gleichheit gegeben ist?

Aufgabe 7.3: Extras zur Diskussion

a) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ eine Folge nicht-negativer Funktionen. Dann gilt: $\sup_n \|f_n\|_\infty = \|\sup_n f_n\|_\infty$.

b) Die Folge von Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty$ konvergiert genau dann gegen $f \in \text{Ł}^\infty$ (bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm), falls sie *beinahe gleichmäßig* gegen f konvergiert.

c) (Unterschiede zwischen Riemannscher und Lebesguescher Integrationstheorie) Schlagen Sie in Analysis-Büchern Ihrer Wahl Konvergenzaussagen für Riemann-Integrale nach (insbesondere unter dem Stichwort parameterabhänge Integrale) und vergleichen Sie diese mit entsprechenden Aussagen für Lebesgue-Integrale.