Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Jun., SS 07
Abgabe : 04. Jul. bis 12 Uhr

Analysis IV

8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1: Ergänzungen zum Satz von Radon-Nikodym

a) Verallgemeineren Sie den Satz von Radon-Nikodym auf den Fall eines σ-endlichen Maßraums.

b) Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Ferner sei $\tilde{\mathscr{A}} \subset \mathscr{A}$ eine Untersigmaalgebra. Zeigen Sie, daß es zu jeder $\mathscr{A}$-meßbaren und integrierbaren Funktion f eine $\tilde{\mathscr{A}}$-meßbare Funktion $\tilde{f}$ gibt derart, daß

$$\forall A \in \tilde{\mathscr{A}} : \qquad \int_A \tilde{f} = \int_A f.$$

Wie sieht $\tilde{f}$ aus, falls $\tilde{\mathscr{A}}$ von zwei disjunkten meßbaren Mengen erzeugt wird. Für Stochastikhörer: Welche Assoziation haben Sie?

Aufgabe 8.2: Maßgeschneidert für Stochastikinteressierte: Konvergenz nach Maß

Es sei $(X, \mathscr{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meßbarer Funktionen *konvergiert nach Maß* (bzw. bezüglich des Maßes μ) gegen die meßbare Funktion f, falls folgendes gilt:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}\Big) = 0$$

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Punktweise Konvergenz impliziert Konvergenz nach Maß.

b) Konvergenz im p'ten Mittel (d.h. bezüglich der $\|\cdot\|_p$-Norm) bedingt ebenfalls Konvergenz nach Maß.

c) Analog zur Konvergenz im p'ten Mittel besitzt jede Folge, welche nach Maß konvergiert, eine punktweise konvergente Teilfolge.

d) (freiwillig) Eine Folge meßbarer Funktionen heißt μ-Cauchy Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ ein Index $N = N(\delta, \epsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m > N$ gilt:

$$\mu\Big(\big\{x \in X : \ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\big\}\Big) < \delta$$

Es gilt die folgende Vollständigkeitsaussage: Eine Folge meßbarer Funktionen $(f_n)_n$ ist genau dann eine μ-Cauchy Folge, falls eine meßbare Funktion f existiert mit $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Bemerkung: Falls μ normiert ist, d.h. $\mu(X) = 1$, so bezeichnet man $(X, \mathscr{A}, \mu)$ als Wahrscheinlichkeitsraum. In diesem Falle wird die Konvergenz bezüglich μ auch als *Konvergenz in Wahrscheinlichkeit* bzw. als *stochastische Konvergenz* bezeichnet. Dabei handelt es sich um einen recht schwachen Konvergenzbegriff, denn es gibt Funktionenfolgen, welche zwar stochastisch aber nirgends punktweise gegen eine Funktion konvergieren. Stochastische Konvergenz besagt salopp gesprochen, daß die Wahrscheinlichkeit mit wachsendem n zunimmt, daß $f_n(x)$ beliebig nahe an $f(x)$ herankommt.

Aufgabe 8.3: Charakterisierung σ-endlicher Maßräume

Zeigen Sie, daß ein Maßraum genau dann σ-endlich ist, falls es eine L^1-Funktion gibt, welche überall strikt größer 0 ist, d.h. überall positives Vorzeichen annimmt.

Aufgabe 8.4: Freistil zum Semesterabschluß

Statt eines weiteren Übungsblattes soll zur Prüfungsvorbereitung Gelegenheit sein, innezuhalten, zu resümieren und nach eigenem Gusto eine Aufgabe auszusuchen, um diese anschließend zu diskutieren.

a) Reflektieren Sie Inhalt und Ziel der Vorlesung: Skizzieren Sie die wesentlichen mathematischen Fragestellungen, welche in der Vorlesung behandelt wurden, und ordnen Sie diese kurz in einen größeren Kontext ein, indem Sie z.B. auf Anwendungsmöglichkeiten (auch innerhalb der Mathematik) eingehen.

b) Lassen Sie ebenfalls die Übungen Revue passieren: Wo sehen Sie Ihre persönlichen Highlights bzw. inwieweit haben Sie im Umgang mit mathematischen Konzepten sowie mit Beweis- und Rechentechniken mehr Vertrautheit erhalten können.

c) Geben Sie sich eine Aufgabenstellung vor, die Sie anschließend bearbeiten. Es bestehen folgende Möglichkeiten:

   – Diskussion einer speziellen Fragestellung aus der Vorlesung oder Übung (z.B. ein Aspekt, der Ihrer Meinung nach unklar, ergänzungsbedürftig bzw. vertiefungswürdig oder sonst wie besonders interessant erscheint.)
   – Eine angemessene Aufgabe aus einem Buch oder selbstausgedacht.

   Ihre Aufgabe sollte sich keinesfalls auf eine reine Wiederholung des Vorlesungsstoffes bzw. besprochener Übungsaufgaben beschränken. Ebensowenig sollen Texte aus Lehrbüchern kopiert werden. Es wäre schön, wenn Ihre Ausarbeitung eine eigenständige Auseinandersetzung erkennen ließe; dabei ist es egal, ob Sie

   – einen Beweis ausführen,
   – eine Rechnung durchführen,
   – einen komplizierteren Sachverhalt oder eine schwierigere Problemstellung anschaulich erklären bzw. kommentieren sowie anhand von Beispielen und/oder Gegenbeispielen erläutern.

   Erwähnen Sie kurz, warum Sie sich für diese oder jene Aufgabe entschließen (z.B.: erstaunliche/verblüffende Aussage, weil ..., oder sehr nützlich, da ...).

Folgendes ist zu beachten:

- Die Bearbeitung von Aufgabe 8.4 ist eine notwendige Voraussetzung für den Erwerb des Übungsscheins.
- Bis zum nächsten und letzten Übungstermin sollte sich jeder mindestens zwei mögliche Fragestellungen überlegt haben, von denen eine in der darauffolgenden Woche schriftlich zu bearbeiten ist. Die Abgabe der Ausarbeitungen erfolgt nach der letzten Vorlesung.
- Sprechen Sie sich mit Ihren Kommilitonen ab, um sicherzustellen, daß nur Sie allein die gewählte Aufgabe bearbeiten.
- Arbeitsumfang: a) und b) jeweils maximal eine Seite, c) mindestens ca zwei Seiten.

Endlich Sommer!