Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 22. Nov., WS 07/08

Numerik von Gleichungssystemen

4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1: Zur Konvergenz des relaxierten Einzelschritt-Verfahrens (Gauß-Seidel)

a) Es sei A eine symmetrische und positiv definite $n \times n$ Matrix mit der *regulären Zerlegung* $A = M - N$ (d.h. M ist invertierbar). Beweisen Sie, daß die Abschätzung

$$\|M^{-1}N\|_A < 1$$

besteht und folgern Sie daraus die Konvergenz des zugehörigen iterativen Verfahrens. Dabei ist $\|\cdot\|_A$ die Norm, welche zu dem von A erzeugten Skalarprodukt gehört.

b) Das relaxierte Gauß-Seidel Verfahren werde auf eine symmetrische, positiv definite Matrix angewendet. Zeigen Sie, daß das Verfahren genau dann konvergiert wenn $\omega \in (0, 2)$.

Aufgabe 4.2: Zur Konvergenzgeschwindigkeit des Gesamt- und Einzelschrittverfahrens

Es bezeichne A die $n \times n$ Systemmatrix des zu lösenden Gleichungssystems. Ferner seien J und G die Iterationsmatrizen des Jacobi bzw. Gauß-Seidel Verfahrens. Es werde vorausgesetzt, daß A block-tridiagonal ist. (Vereinfachend darf angenommen werden, A sei tridiagonal.)

a) Die Matrizen D, E und F ergeben sich aus der Zerlegung von A in einen Diagonalanteil sowie einen unteren und oberen Dreiecksanteil, so daß gilt: $A = D - E - F$. Weisen Sie mittels einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation die Gleichung

$$\det(A) = \det(D - E - F) \stackrel{!}{=} \det\left(D - \mu^{-1}E - \mu F\right)$$

für $\mu \neq 0$ nach.

b) Gewinnen Sie mit Hilfe von a) die Beziehung $\chi_G(\lambda^2) = \lambda^n \chi_J(\lambda)$ und folgern Sie $\rho(G) = \rho(J)^2$.

c) (Zusatz) Das charakteristische Polynom der Iterationsmatrix für das relaxierte Einzelschrittverfahren erfüllt die folgende Gleichung:

$$\chi_{G_\omega}(\lambda^2) = \lambda^n \omega^n \chi_J\left(\tfrac{\lambda^2+\omega-1}{\lambda\omega}\right)$$

Weisen Sie diese Beziehung nach. Läßt sich daraus ein optimaler Wert für ω finden?

d) (Experimentieren) Versuchen Sie die Aussagen der vorangehenden Teilaufgaben anhand des Modellproblems zu demonstrieren.

Aufgabe 4.3: Implementieren des Mehrgitter-Algorithmus

Versuchen Sie das Mehrgitter-Verfahren für das Modellproblem (Aufgabe 1.1) in MATLAB zu implementieren.