Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 10. Jan., WS 07/08

Numerik von Gleichungssystemen

6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1: Alternativbeweis zur Ungleichung von Kantorovich

Es sei A eine symmetrische, positiv definite $n \times n$ Matrix mit den Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$. Folgende Aussagen sind nachzuweisen:

a) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \geq \|x\|^4$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \langle Ax, x\rangle + \lambda_1\lambda_n\langle A^{-1}x, x\rangle \leq (\lambda_1 + \lambda_n)\|x\|^2$

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $P := (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_n I)A^{-1}$. Welches Vorzeichen haben die Elemente $\langle Px, x\rangle$ des numerischen Wertebereichs?

c) Ungleichung von Kantorovich:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \|x\|^4 \leq \langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}\|x\|^4$$

Ferner gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1 : \quad 0 \leq \langle Ax, x\rangle - \langle A^{-1}x, x\rangle^{-1} \leq \left(\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_1}\right)^2$$

Aufgabe 6.2: Lineare Gleichungssysteme als Optimierungsaufgabe: Gradientenverfahren

a) Begründen Sie, daß beim allgemeinen Gradientverfahren ein (lokaler) Abstieg immer möglich ist, falls der Gradient nicht verschwindet. (Frage von A. F.)

b) (Problematische Topographie nach S.W.) Man stelle sich eine gewundene Schlucht vor, zwischen deren steilen Hängen ein rinnenartiger, abschüssiger Weg verlaufe. Die x- und y-Komponente des Gradienten in der Mitte der Rinne sollten gerade in Tangentialrichtung des gekrümmten Weges zeigen. Versucht man nun in negative Gradientenrichtung zu gehen, so wird man wegen der Nicht-Geradlinigkeit des Weges sofort auf einen der Hänge stoßen. Wie kann es da in negativer Gradientenrichtung bergab gehen?

Versuchen Sie sich diese Topographie anhand einer konkreten Funktion zu veranschaulichen and analysieren Sie die tatsächlichen Verhältnisse.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Niveaulinien der Funktionen f und $\tilde{f}$ mit

$$f(x) := \tfrac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle \qquad \text{und} \qquad \tilde{f}(x) := \langle Ax, x\rangle.$$

Geben Sie explizite Formelen für die Niveaulinien von $f, \tilde{f}$ an, und überprüfen Sie damit die Genauigkeit des MATLAB `contour` Befehls. Ferner überprüfe man im MATLAB-Plot, daß die Gradienten wirklich senkrecht auf den Niveaulinien stehen. Warum sollten die Achsen gleich skaliert sein (`axis equal`), um diesen Sachverhalt zu beobachten? (Problem von M.B.)

d) Implementieren Sie das Gradientenverfahren als Löser eines linearen Gleichungssystems und veranschaulichen Sie seine Wirkungsweise im Falle einer 2×2 Matrix. Wie hängt die tatschliche Konvergenzgeschwindigkeit von der Wahl des Anfangswertes ab?