Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 06. Feb., WS 07/08

Numerik von Gleichungssystemen

9. Übungsblatt (Sonderblatt)

Aufgabe 9.1: Eine interessante Polynom-Familie: "Die Tschebyschevs"
Neben den *Legendre-Polynomen* zählen die *Tschebyschev-Polynome* zu prominenten Vertretern der Klasse der *Jacobi-Polynome*. Letztere werden durch zwei reelle Parameter α, β spezifiziert, welche die zugehörige Gewichtsfunktion $w_{\alpha,\beta} := (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ festlegen. Um die Integrierbarkeit der Gewichtsfunktion auf $(-1,1)$ zu gewährleisten sind α und β stets größer -1 zu wählen. Die Jacobi-Polynome zeichnen sich unter anderem dadurch aus, daß sie einer Orthogonalitätsrelation genügen. Genauer gilt für zwei Jacobi-Polynome $J_m^{(\alpha,\beta)}, J_n^{(\alpha,\beta)}$ mit gleichen Parametern aber unterschiedlichen Polynomgraden $m \neq n$:

$$\int_{-1}^{1} J_m^{(\alpha,\beta)}(x)\, J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, w_{\alpha,\beta}(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{1}$$

Während die *Legendre-Polynome* orthogonal sind bezüglich des Standardskalarprodukts, welches sich für $(\alpha,\beta) = (0,0)$ ergibt, so daß die konstante Funktion 1 als Gewichtsfunktion fungiert, gehören die *Tschebyschev-Polynome* zu den Parametern $(\alpha,\beta) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Sie sind somit paarweise orthogonal bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle_w := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

das sich beispielsweise über $\mathcal{C}\big([-1,1]\big)$ betrachten läßt. Man beachte, daß die Gewichtsfunktion $w(x) := (1-x^2)^{-1/2}$ trotz ihrer Singularitäten bzw. Unstetigkeiten bei -1 und 1 über $[-1,1]$ integriebar ist und daher eine $\mathcal{L}^1(-1,1)$-Funktion darstellt. Die Tschebyschev-Polynome weisen eine Reihe sogenannter *Minimax*-Eigenschaften auf, weshalb sie auch gerade in der angewandten Mathematik von eminenter Bedeutung sind.
In den folgenden Aufgaben geht es darum, die Tschebyschev-Polynome vermöge ihrer geforderten Orthogonalitätseigenschaft bezüglich des Skalarprodukts (2) konkret zu bestimmen und einige ihrer Eigenschaften bzw. Darstellungsmöglichkeiten zu studieren. Dabei sollen zunächst die engen Beziehungen zu den trigonometrischen Funktion herausgestellt werden, aus denen z.B. die spezielle Gestalt der Drei-Term Rekursion (siehe Teil e) resultiert. Es mag verwunderlich erscheinen, daß die Tschebyschev-Polynome meist über ihre Orthogonalität eingeführt werden, obwohl sie ihre herausragende Bedeutung ganz anderen Eigenschaften verdanken.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, Gleichheiten etc. und versuchen Sie die Fragen zu beantworten.

a) *(Trigonometrische Orthogonalitätsbeziehungen)* Aus der Fourieranalysis ist bekannt, daß die Funktionen $1, \cos(x), \cos(2x), ..., \sin(x), \sin(2x), ...$ (trigonometrische Monome) bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathcal{L}^2(0,2\pi)$ paarweise orthogonal sind. Ferner sind die Funktionen über jedem Interval, dessen Länge mit der Periode 2π übereinstimmt, ebenfalls orthogonal im $\mathcal{L}^2$-Sinne.
Tatsächlich stehen jeweils $1, \cos(x), \cos(2x), ...$ und $\sin(x), \sin(2x), ...$ auch in $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ senkrecht zueinander (was ist der tiefere Grund dafür?). Gilt dies auch für andere bzw. beliebige Intervalle der Länge π? Müssen bzw. können auch $\cos(mx)$ und $\sin(nx)$ in $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ zueinander orthogonal sein?

b) *(Rekursionsbeziehungen trogonometrischer Monome)* Für $C_n(x) := \cos(nx)$ und $S_n(x) := \sin(nx)$ können sukzessive mittels folgender Formeln berechnet werden:

$$\begin{cases} C_{n+1}(x) = 2\cos(x)C_n(x) - C_{n-1}(x) \\ S_{n+1}(x) = 2\cos(x)S_n(x) - S_{n-1}(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} C_{n+1}(x) = -2\sin(x)S_n(x) + C_{n-1}(x) \\ S_{n+1}(x) = 2\cos(x)C_n(x) + S_{n-1}(x) \end{cases}$$

Die trigonometrischen Monome lassen sich als Polynome in $\cos(x), \sin(x)$ darstellen. Welche trigonometrischen Monome lassen sich als Polynom in einer Variablen – entwder $\cos(x)$ oder $\sin(x)$ – schreiben?

c) *Integraltransformation:* $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f\big(\cos(\theta)\big)g\big(\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\big(\sin(\theta)\big)g\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta$

d) $\mathcal{L}^2_w(-1,1)$*-orthogonale Funktionen:* $\begin{cases} T_n(x) := \cos\big(n\arccos(x)\big) \\ U_n(x) := \sin\big(n\arccos(x)\big) \end{cases} \quad \begin{cases} V_n(x) := \sin\big(n\arcsin(x)\big) \\ W_n(x) := \cos\big(n\arcsin(x)\big) \end{cases}$
Welche Funktionen sind orthogonal zueinander? Welche Funktionen sind Polynome in x? Sonstige erwähnenswerte Beziehungen?

e) *Drei-Term Rekursion:* Die Folge der Tschebyschev-Polynome $(T_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ läßt sich rekursiv bestimmen:

$$\text{Initialisierung: } T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x, \qquad n \geq 1:\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

f) *Darstellung für* $|x| \geq 1$*:* $T_n(x) = \begin{cases} \cosh\big(n \operatorname{arcosh}(x)\big) & \text{falls } 1 \leq x \\ (-1)^n \cosh\big(n \operatorname{arcosh}(-x)\big) & \text{falls } x \leq -1 \end{cases}$

g) *Globale Darstellung:* $\forall x \in \mathbb{R}:\quad T_n(x) = \frac{1}{2}\big[(x + \sqrt{x^2-1})^k \ + \ (x - \sqrt{x^2-1})^k\big]$
Läßt sich diese Darstellung direkt aus der Darstellung in f) herleiten?

h) *Nützliches:* Für $|x| \geq 1$ gilt auch: $T_n(x) = \frac{1}{2}\big[(x + \sqrt{x^2-1})^k \ + \ (x + \sqrt{x^2-1})^{-k}\big]$
Beachte: Aus $a^2 - b^2 = 1$ folgt $a - b = (a+b)^{-1}$. Außerdem gilt: $T_n\big(\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})\big) = \frac{1}{2}(x^m + \frac{1}{x^m})$.

i) *Explizite Darstellung der Tschebyschev-Polynome:* $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k}(1-x^2)^k$
Welcher Faktor steht vor der höchsten Potenz? Man beachte dazu auch die Rekursionsformel.

j) *Rodriguez Formel:* $T_n(x) = \sqrt{1-x^2}\,\dfrac{(-1)^n 2^n n!}{(2n)!}\,\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(1-x^2)^{n-1/2}$

k) *Differentialgleichung:* T_n ist eine Lösung der Differentialgleichung $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.
Wie sieht eine zweite linear unabhängige Lösung aus?

l) *Ableitung der Tschebyschev-Polynome* $\rightarrow$ *Tschebyschev-Polynome der 2. Art*

$$\text{Initialisierung: } \tilde{T}_0(x) = 1,\ \tilde{T}_1(x) = 2x, \qquad n \geq 1:\ \tilde{T}_{n+1}(x) = 2x\tilde{T}_n(x) - \tilde{T}_{n-1}(x)$$

Es gilt für $\theta \in (0,\pi)$: $\tilde{T}_n(\cos(\theta)) = \dfrac{\sin\big((n+1)\theta\big)}{\sin(\theta)}$, ferner: $T_n'(x) = n\tilde{T}_{n-1}(x)$.

m) Symmetrie: $\forall n \in \mathbb{N}_0:\quad T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$, ferner: $T_n(1) = 1$.

n) *Nullstellen und Extremstellen* der Tschebyschev-Polynome liegen sämtlich im Intervall $[-1,1]$. Es gilt: Nullstellen bei $\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi)$ für $k \in \{1,...,n\}$; Extremalstellen auf $[-1,1]$: $|T_n(x)| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\frac{k\pi}{n})$ für $k \in \{0,...,n\}$. Beachte: bei -1 und 1 liegen jedoch keine Extremalstellen vor, falls die Tschebyschev-Polynome auf $\mathbb{R}$ betrachtet werden.

Die vielfältigen Darstellungen der Tschebyschev-Polynome bieten ganz unterchiedliche Möglichkeiten sie zu definieren und auch zu berechnen. Überlegen Sie, wie sich die Tschebyschev-Polynome am effizientesten berechnen lassen. Schreiben diesbezüglich ein MATLAB Ptrogramm und vergleichen Sie unterschiedliche Berechnungsmöglichkeiten.

Letzte Frage: Es heißt die Konvergenzabschätzung des CG-Verfahrens mittels der Tschebyschev-Polynome sei optimal. Bekanntlich besitzen auch die Tschebyschev-Polynome gewisse Optimalitätseigenschaften (die bereits oben erwähnten Minimax-Eigenschaften), da sie in etlichen Fällen die Polynome mit der kleinsten Norm darstellen, welche einer gewissen Zwangsbedingung genügen. Eine derartige Eigenschaft wird bei der Konstruktion des Gradientenverfahrens gefordert. Kann man daraus schließen, daß das Gradientenverfahren eigentlich nichts anderes macht, als implizit die Tschebyschev-Polynome aufzubauen?
Klären Sie das Verwirrspiel und in welchem Sinne die Konvergenzabschätzung optimal oder gar scharf ist.

Aufgabe 9.2: Erzeugung A-konjugierter Vektoren

Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren wird meist als Standardwerkzeug zur Erzeugung orthonormaler Basen herangezogen; es ist jedoch mit einem erheblichen Aufwand verbunden, der sich vor allem bemerkbar macht, wenn die Dimension des Vektorraums groß ist.
Im folgenden wird ein alternatives Verfahren vorgestellt, daß auf einer Drei-Term Rekursion beruht. Dazu sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum (Hilbertraum) und $A : V \rightarrow V$ ein linearer, positiv definiter und symmetrischer (selbstadjungierter) Operator. Der nachstehende Algorithmus baut eine A-*orthogonale* bzw. A-*konjugierte* Basis auf.

Wähle Startvektor: $b_1 \in V$
Für $k = 1, 2, ..., n-1$

$$\alpha_{k+1} := -\frac{\langle Ab_k, b_k\rangle}{\langle b_k, b_k\rangle}, \qquad \beta_{k+1} := -\frac{\langle b_k, b_k\rangle}{\langle b_{k-1}, b_{k-1}\rangle}, \qquad b_{k+1} := (A + \alpha_k)b_k + \beta_k b_{k-1}.$$

a) Beweisen Sie, daß die so generierten Vektoren tatsächlich paarweise *orthogonal* sind.

b) Setzt man $V_k := \operatorname{span}(b_1, ..., b_k)$ so zeige man für $k \in \{1,...,n-1\}$: $V_{k+1} = V_k + AV_k$ oder anders ausgedrückt: $AV_k \subset V_{k+1}$ aber $AV_k \not\subset V_k$.

c) Kombinieren Sie dieses Orthogonalisierungsverfahren mit dem in der Vorlesung untersuchten Verfahren der konjugierten Richtungen. Diskutieren Sie die Nachteile des so erhaltenen Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit s.p.d. Systemmatrizen und überlegen Sie, ob und wie sich das Verfahren verbessern lassen könnte.