



Präsenzübung zum Einführungskurs “Grundlagen der Logik”

Aufgabe 1: Begriffsklärungen

- Was versteht man in der Logik unter Aussagen, Aussageformen sowie unter Junktoren und Ausdrücken?
- Was ist im Sinne der zweiwertigen Aussagenlogik eine Tautologie, was eine Kontradiktion?
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Tautologien und Kontradiktionen? Ist eine Kontradiktion das “Gegenteil” zu einer Tautologie?
- Welche Klassen von Tautologien unterscheidet man?
- Was besagen die logischen de Morgan Regeln?
- Gib Beispielsätze an, welche die logischen Distributivgesetze veranschaulichen.
- Formuliere den Kontrapositionssatz und begründe die Namensgebung.
- Erkläre die lateinische Floskel *ex falso quod libet* (wörtl. “aus Falschem was beliebt”).
- Was bedeuten die folgenden Begriffe: Implikation, Konklusion, Prämisse, notwendige Bedingung, hinreichende Bedingung?

Aufgabe 2: Die NOR-Verknüpfung

- Betrachte die beiden folgenden Sätze:
 - Weder regnet noch schneit es.*
 - Es ist nicht am Regnen oder Schneien.*

Versuche zunächst die zweistellige logische Verknüpfung *weder - noch* (Symbol ∇) mittels anderer logischer Verknüpfungen zu definieren und stelle eine Wahrheitstafel auf. Rechne dann anhand einer Wahrheitstabelle nach, daß die beiden Sätze sinngemäß äquivalent sind. Welche Tautologie ist dabei zu überprüfen?

- Es seien A, B zwei Aussagevariablen. Zeige: $\neg A = A \nabla A$. Finde äquivalente Ausdrücke für $A \vee B$ und $A \wedge B$, in welchen nur ∇ vorkommt.

Tip: Benutze zunächst ein Beispiel, etwa:

Es ist kalt und naß. \Leftrightarrow *Weder ist es warm (nicht kalt) noch trocken (nicht naß).*

Bemerkung: Die Möglichkeit andere Verknüpfungen allein auf die NOR-Verknüpfung zurückführen zu können (siehe auch Aufgabe 3c) ist von grundlegender Bedeutung für die elektronische Schaltungstechnik. Daneben spielt die NAND-Verknüpfung (nicht zugleich) eine wichtige Rolle.

Aufgabe 3: Auflösung von Konditionalgefügen

Beurteile die folgenden Aussagen zunächst spontan hinsichtlich eines möglichen Sinnunterschieds:

- i) *Hans besteht die Klausur nicht, wenn er die Übungen nicht sorgfältig bearbeitet.*
- ii) *Hans bearbeitet die Übungen sorgfältig, oder er besteht die Klausur nicht.*
- iii) *Es ist nicht möglich, daß Hans die Klausur besteht, ohne die Übungen sorgfältig zu bearbeiten.*

Beachte, daß es sich in Satz ii) nicht um ein ausschließendes *oder* handelt, d.h. Hans kann die Klausur nicht bestehen trotz sorgfältiger Bearbeitung der Übungsaufgaben. Analysiere nun die Sätze mittels der Aussagenlogik:

- a) Isoliere die Teilaussagen in den drei Beispielsätzen und gib an, wie (durch welche Junktoren) diese jeweils zu der Gesamtaussage verknüpft sind.
- b) Rechne anhand von Wahrheitstabellen nach, ob die drei Sätze den gleichen Wahrheitswert besitzen.
- c) Stelle die Verknüpfung $A \Rightarrow B$ mittels eines Ausdrucks dar, welcher nur den NOR-Junktor ∇ enthält (Aufgabe 2).
- d) Betrachte abschließend die beiden folgenden Aussagen:
C: Hans bekommt den Übungsschein.
D: Hans besteht die Klausur.

Finde verschiedene Formulierungen analog zu i),ii) und iii), welche die Äquivalenz dieser beiden Aussagen zum Ausdruck bringen. Welche Bedingungen sind für den Erhalt des Übungsscheines notwendig, welche hinreichend?

Aufgabe 4: Vom mathematischen Beweisen

- a) Was ist ein direkter Beweis? Erläutere kurz die Vorgehensweise.
- b) Was versteht man unter einem Kontrapositionsbeweis?
- c) Wie funktioniert ein indirekter Beweis?
- d) Es sei $A(x)$ eine Aussageform über der Menge X . Verneine die folgenden Ausdrücke:

$$\text{i) } \forall x \in X A(x), \quad \text{ii) } \forall x \in X \neg A(x), \quad \text{iii) } \exists x \in X A(x), \quad \text{iv) } \exists x \in X \neg A(x).$$

Gib an, wie die Ausdrücke bzw. ihre Verneinungen in Worten zu lesen sind.

- e) In der Mathematik gibt es Sätze, die eine Klasse von Objekten durch verschiedene *äquivalente* Eigenschaften (z.B. Aussagen A, B, C) beschreiben. Im Beweis ist dann zu zeigen, daß jede Eigenschaft die anderen impliziert. Im Falle von drei Eigenschaften sind also 6 "Richtungen" nachzuweisen. Zeige, daß sich der Beweis im folgenden Sinne verkürzen läßt:

$$((A \Leftrightarrow B) \wedge (A \Leftrightarrow C) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A)).$$

Anhand einer Wahrheitstabelle prüfe man nach, daß es sich bei dem obigen Ausdruck um eine Tautologie handelt.

Zum Schluß: Kommentiere den folgenden Satz:

Alle Schnecken haben Häuser, und alle Häuser haben Schornsteine. Ergo haben alle Schnecken Schornsteine.