4. Mengen können eine Menge

Die Mengenlehre ist in ihrer modernen Form das Fundament der Mathematik. So können z.B. alle mathematischen Aussagen letztlich mit Begriffen der Mengenlehre formuliert werden und alle derzeitigen mathematischen Ergebnisse durch logisches Schließen aus einem geeignetet Axiomensystem der Mengenlehre abgeleitet werden.
Trotz dieser fundamentalen Stellung der Mengenlehre soll hier kein vertieftes Studium der Axiome der Mengenlehre betrieben werden. Wir werden den Mengenbegriff intuitiv verwenden und die benötigten Konzepte dann einführen, wenn wir sie brauchen. Das wird nicht zu Problemen führen, da die Axiome so angelegt sind, dass sie unserem intuitiven Konzept der Menge als einer Zusammenfassung bestimmter Objekte entspricht.
Das mehr als diese intuitive Formulierung für eine widerspruchsfreie Theorie nötig ist, zeigt das Beispiel des englichen Philosophen und Mathematikers Bertrand Russel (1901): Die Zusammenfassung aller Mengen kann keine Menge sein, da sie einer Eigenschaft widerspricht, die wir auf jeden Fall von einer Menge verlangen. Die verletzte Eigenschaft ist dabei eine natürliche Forderung an Mengen, das sogenannte *Aussonderungsaxiom*: wenn in einer Menge nach einem bestimmten Kriterium Elemente ausgewählt werden, dann bilden diese Elemente wieder eine Menge. Formal führt man für diesen Aussonderungsmechanismus *variable Aussagen* (sogenannte *Aussageformen*) ein. Eine Aussageform $A(x)$ ist also eine Zeichenkette, die zu einer Aussage wird, wenn man für das Symbol x ein geeignetes Objekt einsetzt. Ein Beispiel ist die Aussageform $A(n)$ definiert durch den Ausdruck $n \in \mathbb{N}$, wobei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ist und für n Zahlen eingesetzt werden dürfen.
Es gilt also, dass $A(1)$ wahr und $A(\frac{1}{2})$ falsch ist.
Natürlich kann eine Aussageform auch von mehreren Variablen abhängen, etwa die durch $x < y$ definierte Aussageform $B(x, y)$.
Ist nun M eine Menge und $A(x)$ eine Aussageform, so besagt das Aussonderungsaxiom, dass auch die Elemente $x \in M$ für die $A(x)$ wahr ist, wieder eine Menge bilden. Die Schreibweise für diese neue Menge ist

$$\{x \in M | A(x)\}$$

Als konkretes Beispiel nehmen wir $M = \mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Dann bilden die Zahlen zwischen 1 und 10 wieder eine Menge, die wir mit Hilfe der Aussageform $A(x)$ gegeben durch $1 \leq x \leq 10$ aussondern können. Entsprechend werden die Zahlen größer als 10 mit $\{x \in \mathbb{N} | x > 10\}$ ausgesondert.

Das Russelsche Paradoxon entsteht nun, wenn man annimmt, dass die Zusammenfassung aller Mengen selbst wieder eine Menge ist. Nennen wir sie hier einmal M. Dann folgt mit dem Aussonderungsprinzip und der Aussageform $x \notin x$, dass auch

$$A = \{x \in M | x \notin x)\}$$

eine Menge ist (die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten), d.h. $A \in M$. Nun gilt aber sicherlich entweder $A \in A$ oder $A \notin A$. Im ersten Fall müsste aber, da $A \in A$ ist, die Bedingung $A \notin A$ gelten - ein Widerspruch. Im zweiten Fall müsste wegen $A \notin A$ und $A \in M$ aber $A \in A$ gelten - schon wieder ein Widerspruch. Die Annahme, dass M eine Menge ist und die Annahme der Gültigkeit des Aussonderungsprinzips führt also in jedem Fall auf einen nicht auflösbaren Widerspruch, so dass mindestens eine der Annahmen nicht wahr sein kann. In der heutigen Mengentheorie hat man sich für das Aussonderungsprinzip entschieden, und damit ist die Zusammenfassung aller Mengen selbst keine Menge.

Anschauliche Varianten des gleichen Konflikts sind z.B. der Frisör, der jedem die Haare schneidet, der sich nicht selbst die Haare schneidet. Schneidet dann der Frisör sich selbst die Haare? Oder der Katalog in einer Bibliothek, der alle Bücher auflistet, die sich nicht selbst auflisten. Führt dieser Katalog sich selbst auf?

Ein wichtiges Sprachkonstrukt im Zusammenhang mit Aussageformen sind die sogenannten Quantoren, der Existenzquantor $\exists$ und der Allquantor $\forall$. Dabei ist die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

wahr, wenn es (mindestens) ein Element $x \in M$ gibt, für das $A(x)$ wahr ist. Entsprechend ist die Aussage

$$\forall x \in M : A(x)$$

wahr, wenn für alle Elemente $x \in M$ die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Möchten wir z.B. die Menge der geraden Zahlen einführen, so kann man dies mit

$$\{n \in \mathbb{N} | \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$$

erreichen. Die Definition einer gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergenten Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird damit so formuliert werden:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon$$

Eine etwas angenehmere Lesart ist sicherlich: Eine reelle Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen die Zahl $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn zu jedem noch so kleinen Toleranzparameter $\varepsilon > 0$ ein passender Index $N \in \mathbb{N}$ gefunden werden kann, so dass für jeden größeren Index $n \geq \mathbb{N}$ der

Abstand zwischen x_n und a kleiner als der Toleranzparameter ist, d.h. $|x_n - a| < \varepsilon$.
Welche Schreibweise Sie auch bevorzugen, Sie sollten nach einer gewissen Trainingsphase in der Lage sein, zwischen beiden Darstellungsformen fließend zu übersetzen.
Zum Abschluss unseres kurzen Ausflugs in die Nähe der Mengenlehre wollen wir noch kurz die wichtigsten Mengenoperationen zusammenfassen.
Definition: Seien A, B Mengen. Wir sagen A ist eine Teilmenge von B, oder kurz $A \subset B$, genau dann wenn jedes Element aus A auch ein Element von B ist. Die Mengen sind gleich, kurz $A = B$, wenn $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt.
Na dann legen Sie mal los. Wie lautet die formale Schreibweise dieser Definition? Bei einer Definition wird eine neue Notation eingeführt, indem man eine Tautologie postuliert. In unserem Fall

$$\forall A, B \text{ Mengen} : A \subset B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in A : x \in B$$

$$\forall A, B \text{ Mengen} : A = B \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$$

Die bekannten Konzepte Durchschnitt und Vereinigung zweier Mengen $A, B \subset M$ können dann so formuliert werden:

$$A \cap B = \{x \in M | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \in M | x \in A \vee x \in B\}.$$

Streng genommen sind diese beiden Zeilen nur Aussageformen (mit Variablen A, B). Eine Definition wird daraus, wenn wir einen Allquantor voranstellen und der resultierenden Aussage den Wahrheitswert 1 zuordnen. Da wir hier nur über Teilmengen einer anderen Menge M sprechen, ist es angenehm, die Menge $P(M)$ aller Teilmengen von M zu benutzen (d.h. $\forall A, B \in P(M)$). Dass $P(M)$ tatsächlich eine Menge ist, folgt übrigens aus dem Potenzmengenaxiom der Mengenlehre.
Entsprechend definiert sich die Mengendifferenz

$$A \backslash B = \{x \in M | x \in A \wedge x \notin B\}$$

wobei $x \notin B$ abkürzend für $\neg(x \in B)$ steht. Das Komplement einer Teilmenge von M ist dann einfach $A^c = M \backslash A$.
Ausgehend von der Definition der Mengenoperationen lassen sich nun einfache Rechenregeln ableiten, die letztlich aus den Wahrheitstabellen der logischen Verknüpfungen folgen.
So gilt z.B. die Regel $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.