Warum ist die Tabelle schwer zu schlucken?

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In der Umgangssprache benutzt man *daraus folgt, also, impliziert, wenn …dann,* nur für kausale Zusammenhänge

Eine Implikation der Form:

Wenn Konstanz eine Uni hat, dann ist Wasser nass.

ist im Sinne der Aussagenlogik wahr, gefühlsmäßig aber nicht, da es keinen kausalen Zusammenhang gibt.

Ein kausaler Zusammenhang entspricht einer *speziellen wahren Implikation*.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Beispiel:

Wenn $\underbrace{\text{\textit{es regnet}}}_{A}$, *dann* $\underbrace{\text{\textit{wird die Erde nass}}}_{B}$.

$A \Rightarrow B$

Wenn A wahr ist dann ist B zwangsläufig auch wahr.

Wir sagen B ist *notwendig* für A und A ist *hinreichend* für B.

… es könnte ja noch andere Gründe für B geben.

Zusammenfassung:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Aussagenlogik arbeitet unabhängig vom Inhalt der Aussagen und *muss* deshalb auch alltagssprachlich unübliche Implikationen zulassen.

Die Wahrheitswerte sind aber so zugeordnet, dass übliche Implikationen (kausale Zusammenhänge) korrekt behandelt werden.

Bem.: An *und* bzw. *oder* stellt die Alltagssprache weniger Anforderungen.

Die Argumentation des Technikers:

Bei diesem Fehler liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer oder ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.

Die Taktstörung ist es diesmal nicht.

Also haben wir einen Kriechstrom in der Sensorik.

entspricht der Verknüpfung: $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$ mit:

$A =$ *Es liegt eine Taktstörung im zentralen Celurgabuffer vor.*

$B =$ *Es liegt ein Kriechstrom in der Phylasensorik vor.*

$$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$$

$A(p) =$ *Die Zahl p ist gerade.*

$B(p) =$ *Die Zahl p ist eine Primzahl.*

Wenn p eine gerade Zahl oder eine Primzahl ist

und p ungeade ist,

dann ist p eine Primzahl.

$$(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$$

$A =$ *Der Hund bellt.*

$B =$ *Die Karawane zieht weiter.*

Da der Hund bellt oder die Karawane weiterzieht

und der Hund nicht bellt,

zieht die Karawane weiter.

Wir empfinden $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$

unabhängig vom konkreten Inhalt

der Elementaraussagen *A, B* als korrekten Schluss.

$(A$	$\vee$	$B)$	$\wedge$	$\neg A$	$\Rightarrow$	B
0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1

Unsere Schlussregel $(A \vee B) \wedge (\neg A) \Rightarrow B$
ist eine *Tautologie*, d.h. eine Aussageverknüpfung, die unabhängig vom Inhalt und den Wahrheitswerten der beteiligten Elementaraussagen *stets wahr* ist.

Es zeigt sich:

korrekte logische Schlüsse entsprechen jeweils *tautologischen Implikationen*.

Beispiel: $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

immer erst ausprobieren (experimentieren, spielen) …

$A =$ *Das Seil reißt.*

$B =$ *Armin fällt.*

ergibt:

Das Seil reißt und wenn das Seil reißt, fällt Armin.
Also fällt Armin.

korrekter Schluss?

Ob $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ ein logisch korrekter Schluss ist, lässt sich *nachrechnen.*

A	$\wedge$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Rightarrow$	B
0	0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

Beim Umformen von Aussagen helfen
tautologische Äquivalenzen

Beispiel:

$A =$ *Ich bin besoffen.*

$B =$ *Ich bin müde.*

Dann sind:

$\neg(A \wedge B)$ *Müde und besoffen bin ich nicht.*

$(\neg A) \vee (\neg B)$ *Ich bin nicht müde oder ich bin nicht besoffen.*

sinngemäß identisch, d.h. *äquivalent* (Regel von de Morgan)

Die *äquivalent*-Verknüpfung:

Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn sie den selben Wahrheitswert haben

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Die intuitive Äquivalenz von:

$\neg(A \wedge B)$ *Müde und besoffen bin ich nicht.*

$(\neg A) \vee (\neg B)$ *Ich bin nicht müde oder ich bin nicht besoffen.*

lässt sich durch *Nachrechnen* bestätigen:

$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$\neg A$	$\vee$	$\neg B$
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0

Beispiel: $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$ ist stets wahr

also eine tautologische Äquivalenz

A	$\Leftrightarrow$	$\neg$	$\neg A$
0	1	0	1
1	1	1	0

Tautologie: Aussage die stets *wahr* ist.

Kontradiktion: Aussage die stets *falsch* ist.

Beispiel: $A \wedge (\neg A)$

(spielen … $A =$ *Ich mag Logik.*)

A	$\wedge$	$\neg A$
0	0	1
1	0	0

Tautologien und Kontradiktionen lassen sich auch auf Aussageformen anwenden, da sie *unabhängig vom Wahrheitswert* der beteiligten Aussagen wahr bzw. falsch sind.

Beispiel: $x \notin [0,1] \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$ ist stets *wahr*

$\neg(x \in [0,1])$

$[0,1] = \{ x \mid 0 \le x \wedge x \le 1 \}$

benutzte Tautologie: $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$

Beispiel: $x \notin [0,1] \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$ ist stets *wahr*

hilfreiche Notation: Allquantor

$$\forall x \in \mathbf{R} : x \notin [0,1] \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 1$$

Lies: für alle x in der Menge $\mathbf{R}$ gilt …

generell: $\forall x : \mathrm{A}(x)$ ist eine Aussage, die wahr ist, wenn $\mathrm{A}(x)$ für alle zuglässigen x wahr ist.

Beispiele: $\forall x : x = x$ ist *wahr*

$\forall x, y \in \mathbf{R} : x + y = y + x$ ist *wahr*

$\forall x, y \in \mathbf{R} : x > y$ ist *falsch*

$\forall n \in \mathbf{N} : n$ gerade $\Rightarrow n^2$ gerade ist *wahr*

Logik Aussageformen

hilfreiche Notation: Existenzquantor

$$\exists x \in \mathbf{R} : \quad x^2 = -1$$

Lies: es existiert ein x in der Menge $\mathbf{R}$ so dass …

generell: $\exists x : \mathrm{A}(x)$ ist eine Aussage, die wahr ist, wenn $\mathrm{A}(x)$ für ein zuglässiges x wahr ist.

Beispiel: $\exists x \in \mathbf{R} : \quad x^2 = -1$ ist *falsch*

Logik Aussageformen

… also: $\neg\left(\exists x \in \mathbf{R} : \quad x^2 = -1\right)$ ist *wahr*

… äquivalent formuliert: $\forall x \in \mathbf{R} : \quad x^2 \neq -1$ ist *wahr*

tautologische Äquivalenz: $\neg\left(\exists x : \mathrm{A}(x)\right) \Leftrightarrow \forall x : \neg \mathrm{A}(x)$

genauso: $\neg\left(\forall x : \mathrm{A}(x)\right) \Leftrightarrow \exists x : \neg \mathrm{A}(x)$

experimentieren …!

Logik Aussageformen

$A =$ *Niemand mag mich.*

… äquivalent formuliert mit: $M(x)$ = x mag mich

$$A \Leftrightarrow \neg\left(\exists \text{Person } x : M(x)\right)$$

bzw. $A \Leftrightarrow \forall \text{Personen } x : \neg M(x)$

Achtung: die Negation von A ist *nicht* gleichbedeutend mit der Aussage *„Alle mögen mich.”*, sondern

$$\neg A \Leftrightarrow \exists \text{Person } x : M(x)$$

Logik Aussageformen

Beispiel: gleichmäßige gleichgradige Stetigkeit

Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : (a,b) \to \mathbf{R}$

heißt gleichmäßig gleichgradig stetig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in (a,b) : \forall x \in (a,b), |x - x_0| < \delta : \forall n \in \mathbf{N} : |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

Frage: wann ist (f_n) *nicht* gleichmäßig gleichgradig stetig?

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x_0 \in (a,b) : \exists x \in (a,b), |x - x_0| < \delta : \exists n \in \mathbf{N} : |f_n(x) - f_n(x_0)| \geq \varepsilon$$

Logik Aussageformen

Vorsicht: Quantoren vertauschen nicht ohne weiteres

Beispiel: $A(F, M) =$ *F hat was mit M.*

$$\forall \text{Männer } M : \exists \text{Frau } F : A(F, M)$$

ist *nicht* äquivalent mit

$$\exists \text{Frau } F : \forall \text{Männer } M : A(F, M)$$

Logik Zusammenfassung

- Eine Aussage ist ein Sachverhalt, der entweder wahr oder falsch ist.
- Durch Verknüpfung von Aussage(forme)n mit Junktoren entstehen weitere Aussage(forme)n.
- Durch Quantoren werden Aussageformen zu Aussagen.
- Der Wahrheitswert einer Verknüpfung folgt aus der entsprechenden Wahrheitstabelle.
- Logische Schlussfolgerungen entsprechen tautologischen Implikationen.
- Aussage(forme)n lassen sich umformen mit Hilfe von tautologischen Äquivalenzen.

Mengentheorie

Menge und *Element* sind Grundbegriffe der Theorie.

Die Fragen: *„Was ist eine Menge?“*
„Was ist ein Element?“

werden nicht diskutiert. Statt dessen wird spezifiziert, wie man mit Mengen und Elementen *arbeitet.*

Analog: Punkte, Geraden,… (Geometrie)
Reelle Zahlen (Analysis)
Wahscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeitstheorie)
Masse, Gravitation (klassische Mechanik)

Arbeitsanweisungen in Form von *Axiomen:*

vereinbarungsgemäß wahre Aussagen

Auszug:

M1: Es gibt eine Menge.

M2: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

M3: Zu jeder Menge M und jeder Aussageform $A(x)$ gibt es eine Menge B, die genau jene Elemente enthält, für welche die Aussage $A(x)$ wahr ist.

M3 heißt Aussonderungsaxiom.

Schreibweise: $B = \{x \in M \mid A(x)\}$

Beispiel: $A(x) = (x \neq x)$ $\quad M$ Menge

$\{x \in M \mid x \neq x\}$ ist eine Menge ohne Elemente

die sogenannte leere Menge $\{\ \}$

Beispiel: $A(x) = (x > 0 \ \wedge \ x < 1)$

$\{x \in \mathbf{R} \mid A(x)\} = (0,1)$

offenes Intervall (ohne Endpunkte)

Beispiel: $A(n) = \exists k \in \mathbf{N} : n = 2k$

$\{n \in \mathbf{N} \mid A(n)\}$ Menge der geraden Zahlen

Beweise

Als Beweis einer Aussage bezeichnet man eine Folge von logischen Schlüssen, die zeigt, dass die Aussage wahr ist.

Eine wahre Aussage heißt auch Satz oder Theorem.

Ein Hauptsatz ist ein besonders bedeutender Satz.

Ein Lemma ist ein Hilfssatz in einem längeren Beweis.

Ein Korollar ist eine Folgerung aus einem zuvor bewiesenen Satz.

Satz: Sei n eine gerade Zahl.
Dann ist auch n^2 gerade.

äquivalente Formulierung mit
$G = \left\{ n \in \mathbf{N} \,\middle|\, \exists k \in \mathbf{N} : n = 2k \right\}$

Satz: $\forall\, n : n \in G \Rightarrow n^2 \in G$

Beweis: Sei $n \in G$.
Dann gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ mit $n = 2k$.
Also ist $n^2 = (2k)(2k) = 2(2k^2)$,
d.h. mit $m = 2k^2 \in \mathbf{N}$,
folgt $n^2 = 2m \in G$. ■

Beweisende

Diskussion: Die Aussage ist von der typischen Form:

$$\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$$

Zu zeigen: $A(x) \Rightarrow B(x)$ ist wahr für alle $x \in M$

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Es genügt zu zeigen, dass $B(x)$ nicht falsch ist, wenn $A(x)$ wahr ist.

bzw. dass $B(x)$ wahr ist, wenn $A(x)$ wahr ist.

Der Nachweis wird in geeignete *Beweisschritte* zerlegt.

Jeder Schritt hat die Form einer wahren Implikation.

$$A(x) \Rightarrow Z_1(x),\ Z_1(x) \Rightarrow Z_2(x), \ldots, Z_m(x) \Rightarrow B(x)$$

Als wahre Implikationen dienen Definitionen und Sätze.

Wenn $A(x)$ und die Implikation $A(x) \Rightarrow Z_1(x)$ wahr sind,
dann zeigt die Tabelle, dass $Z_1(x)$ wahr ist.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Mehrfache Anwendung ergibt, dass
$Z_2(x), Z_3(x), \ldots, Z_m(x), B(x)$
wahr sind.

Benutzte Strategie: direkter Beweis

zum Beweis von $\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$
nimm an, dass $A(x)$ wahr ist und zeige,
mit geeigneten Beweisschritten,
dass $B(x)$ wahr ist.

Weitere Strategie: Beweis durch Kontraposition

Benutzt die Tautologie $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Beispiel:
Wenn der Schalter schließt, dann leuchtet die Lampe.

Kontraposition:
Wenn die Lampe aus ist, dann ist der Schalter offen.

Satz: Sei n^2 eine gerade Zahl.
Dann ist auch n gerade.

äquivalente Formulierung mit
$G = \{ n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \mathbf{N} : n = 2k \}$

Satz: $\forall n : n^2 \in G \Rightarrow n \in G$

Kontraposition: $\forall n \in \mathbf{N} : n \notin G \Rightarrow n^2 \notin G$

Beweis: Sei $n \notin G$, also *ungerade*.
Dann gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ mit $n = 2k - 1$.
Also ist $n^2 = (2k-1)^2 = 2(2k^2 - 2k) + 1$,
d.h. mit $m = 2k^2 - 2k \in \mathbf{N}$,
Folgt $n^2 = 2m + 1 \notin G$. w.z.b.w.

was zu beweisen war

Diskussion: Ein direkter Beweis wäre hier schwieriger
da $n^2 \in G$ also $n^2 = 2k$
nicht direkt etwas über n aussagt.

Andererseits haben wir eine genaue
Charakterisierung der Zahlen $n \notin G$
so dass wir eine Argumentationskette
starten können.

Bem.: Welche Strategie zum Erfolg führt muss *ausprobiert* werden!