Weitere Strategie: indirekter Beweis/Widerspruchsbeweis

Zu zeigen: $\forall x \in M : A(x) \Rightarrow B(x)$

Nimm an, dass $A(x)$ wahr ist und zeige,

mit geeigneten Beweisschritten, $\underbrace{\text{dass } B(x) \text{ wahr ist}}_{\text{direkter Beweis}}$, bzw.

$\underbrace{\text{dass } \neg B(x) \text{ falsch ist}}_{\text{indirekter Beweis}}$.

Wie zeigt man, dass eine Aussage A falsch ist?

Man zeigt mit einer wahren Implikation, dass aus A eine falsche Aussage B folgt.

Einzige Zeile mit wahrer Implikation und falscher Konklusion.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Im Widerspruchsbeweis zu $A(x) \Rightarrow B(x)$

nimm an, $A(x)$ sei wahr.

Zeige mit wahren Implikationen

$\neg B(x) \Rightarrow Z_1(x), Z_1(x) \Rightarrow Z_2(x), \ldots, Z_m(x) \Rightarrow F$

wobei F eine *falsche* Aussage ist.

Damit sind dann $Z_m(x), \ldots, Z_2(x), Z_1(x), \neg B(x)$

auch falsch, d.h. $B(x)$ ist wahr.

Satz: Es gibt keine positive rationale Lösung der Gleichung

$$x^2 = 2$$

äquivalente Formulierung

Satz: $\forall\, x \in \mathbf{R} : x^2 = 2 \Rightarrow x \notin \mathbf{Q}^+$

$\neg\left(x \notin \mathbf{Q}^+\right)$

Indirekt!

Beweis: Sei $x^2 = 2$ und $x \in \mathbf{Q}^+$

Dann gilt die Aussage:

$$C(x) = \exists p, q \in \mathbf{N} : p, q \text{ teilerfremd } \wedge\ x = \frac{p}{q}$$

Aus $C(x)$ und $x^2 = 2$ folgt $p^2 = 2q^2 \in G$ und $C(x)$.

Mit unserem Satz gilt dann $p = 2k$ für ein $k \in \mathbf{N}$ und $C(x)$.

Damit ist $q^2 = p^2/2 = 2k^2 \in G$ und $C(x)$.

Wird in der Argumentation normalerweise nicht mitgeführt

Unser Satz zeigt wieder $q \in G$ und $C(x)$.

Also gibt es $m, n \in \mathbf{N}$ mit $q = 2m$, $p = 2n$ und $C(x)$,

falsche Aussage

d.h. p und q haben einen gemeinsamen Teiler und sind teilerfremd ↯

Weitere Strategie: Gegenbeispiel

z.B. nach vielen glücklosen Beweisversuchen

angezweifelt: $\forall x \in M : A(x)$

Versuche $\neg\left(\forall x \in M : A(x)\right)$ zu beweisen,

d.h. $\exists x \in M : \neg A(x)$

Strategie: finde x, so dass $A(x)$ falsch ist.

Beweise — Gegenbeispiel

Behauptung: Für jede natürliche Zahl *n* ist der Ausdruck n^2+n+41 eine Primzahl.

Äquivalente Aussage:

$$\forall\, n \in \mathbf{N} : n^2+n+41 \text{ ist Primzahl}$$

Gegenbeweis: Sei *n*=41.

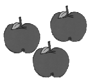
Dann gilt: $n^2+n+41 = 41 \cdot 43$ ist keine Primzahl.

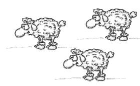
quod erat demonstrandum (was zu beweisen war) → q.e.d.

Zahlen

μ $\Leftrightarrow$ γ ∇ ϑ ∞ ε β $\int$ Φ Σ Ψ $\forall$ δ ξ α $\subseteq$ Ω

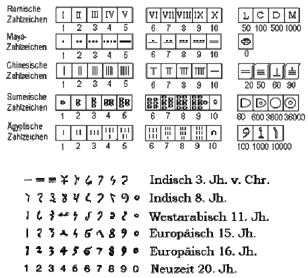
Zahlen — Abstraktion





|||

Zahlen — Entwicklung



Zahlen — Entwicklung

$$\mathbf{Q}: \begin{cases} \mathbf{Z}: \begin{cases} \mathbf{N}: & 1,2,3,4,5\ldots \\ & 0 \\ & -1,-2,-3\ldots \end{cases} \\ \qquad \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{4}, \ldots \end{cases}$$

Q beschreibt beliebig kleine Schnipsel, z.B. $\frac{3}{43217}$

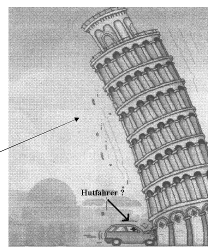
und beliebig große Stücke …

sollte genügen, um alles Messbare zu beschreiben …

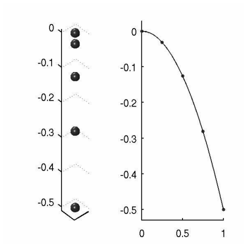
Mathematik im Einsatz — Beispiel: Zahlen

… also auch die *Zeit*

Fallexperiment von Galileo



Beobachtung:



Fallgesetz:

$s(t) = ct^2, \ t \in \mathbf{Q}$

Angenommen $s(t_1) = 1$

Vorhersage: zu welchem Zeitpunkt ist die Kugel die doppelte Strecke gefallen?

Aufgabe: bestimme $t_2 \in \mathbf{Q}$ mit $s(t_2) = 2$

Unser Satz zeigt: so ein t_2 gibt es nicht.

Also kommt die Kugel *nie* bei s=2 an?

Problem: die rationalen Zahlen haben *Lücken.*

Da wir die Zeit lückenlos empfinden, sind die rationalen Zahlen ein schlechtes Zeitmodell.

Auch den Raum empfinden wir lückenlos …

Alle klassischen Messgrößen erscheinen lückenlos.

Wir brauchen ein *Kontinuum* von Zahlen,

d.h. die reellen Zahlen.

μ $\Leftrightarrow$ γ ∇ ϑ ∞

Symbole

ε β $\int$ Φ Σ Ψ $\forall$ δ ξ α $\subseteq$ Ω

$\neg$	nicht
$\wedge$	und
$\vee$	oder
$\Rightarrow$	impliziert
$\Leftrightarrow$	äquivalent
$\forall$	für alle
$\exists$	es existiert
:	gilt/so dass

α, A	Alpha	λ, Λ	Lambda	ϕ, φ, Φ	Phi
β, B	Beta	μ, M	My	χ, X	Chi
γ, Γ	Gamma	ν, N	Ny	ψ, Ψ	Psi
δ, Δ	Delta	ξ, Ξ	Xi	ω, Ω	Omega
ε, E	Epsilon	o, O	Omikron		
ς	Zeta	π, Π	Pi		
η, H	Eta	ρ, P	Rho		
$\theta, \vartheta, \Theta$	Theta	σ, Σ	Sigma		
ι, I	Jota	τ, T	Tau		
κ, K	Kappa	υ, Υ	Ypsilon		