Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 26. Juni, SS 08

Mathematische Modellierung

5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1: Der Mond ist aufgegangen ... – Licht-Schatten Grenze auf einer Kugel.

In vielen Kinderbüchern finden sich recht phantasievolle Darstellungen des Mondes ähnlich derjenigen auf der abgebildeten Briefmarke. Die Mondsichel erscheint dabei meist mit sehr langgezogenen, stark gekrümmten Spitzen. Durch eine kleine Innenausbuchtung, welche eine Nase andeutet, sowie Mund und Augen ergänzt, ergibt sich oftmals ein freundlich lächelndes Gesicht, das huldvoll zu den Erdenbewohnern herabblickt.

Sind die Darstellungen vieler Bilderbücher realistisch, was die Formgebung der Mondsichel anbetrifft? Berechnen Sie dazu die tatsächlich möglichen Formen, die der Mond bei einem kompletten Phasendurchlauf annehmen kann.
Konkret: Geben Sie also in Abhängigkeit von der jeweiligen Mondphase eine Parametrisierung der Kurve an, welche die zugehörige Licht-Schatten Grenze beschreibt. Versuchen Sie (mit MATLAB) einige mögliche Mondsicheln zu visualisieren.

P.S.: Der Mond findet sich vielfach auch auf Wappen und Flaggen wieder – insbesondere von islamischen Ländern. Eine interessante Übersicht findet man z.B. unter `http://de.wikipedia.org/wiki/Mondsichel`. Welche Sicheln sehen wirklichkeitsgetreuer aus? Kann man eine zulässige Mondsichel dadurch erhalten, daß man aus einem Kreis einen *nicht-konzentrischen* Kreis ausschneidet?
Weiterführende Frage: Falls nein, ist es möglich einen Körper so zu formen und anzustrahlen, daß sich in der perspektivischen Projektion (z.B. auf einer Photographie) ein derartiger Grenzverlauf zwischen der Licht- und Schattenzone ergibt?

Auch der Computer verabschiedet sich beim Herunterfahren mit einer märchenhaften Mondsichel, in der es sich das KDE-Maskottchen wie in einer Hängematte für die Schlafenszeit bequem gemacht hat.
Zu guter Letzt: Wenn Sie die Mondsichel das nächste Mal betrachten, versuchen Sie, sich dabei ein Gesicht einzubilden und überlegen Sie, warum Sie mehr oder weniger erfolgreich sind.

Aufgabe 5.2: Das Teilchen auf der rotierenderen Scheibe

Die folgende Aufgabe ergänzt bzw. kontrastiert Aufgabe 4.2 "Die Kugel auf der rotierenden Scheibe".

Ein punktförmiges Teilchen befinde sich auf einer Scheibe, welche zu rotieren beginnt. Dabei nehme die Winkelgeschwindigkeit gleichförmig mit der Zeit zu, bis ein vorgegebener Wert ω_0 erreicht wird. Aufgrund der Haftreibung rotiert das Teilchen zunächst mit der Scheibe mit. Übersteigt die erforderliche Zentripetalkraft (durch Zunahme der Winkelgeschwindigkeit) die (maximale) Haftreibungskraft, so setzt sich das Teilchen relativ zur Scheibe in Bewegung. Dabei soll es einer deutlich geringeren Gleitreibungskraft unterliegen, welche stets der relativen Geschwindigkeit des Teilchens auf der Scheibe entgegenwirkt aber unhabhängig vom Betrag der relativen Geschwindigkeit ist. Wie verhält sich das Teilchen?

Aufgabe 5.3: Schnittkurve von Kugel und Ellipsoid

Betrachten Sie eine Kugel $\mathcal{S}$ und einen Ellipsoid $\mathcal{E}$, deren beider Mittelpunkte mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen. Leiten Sie eine Differentialgleichung für die (möglichen) Schnittkurven her und vergleichen Sie diese mit den *Euler Gleichungen* für die Bewegung des starren Körpers.

Aufgabe 5.4: Die Kollermühle

In der Vorlesung wurden die *Euler Gleichungen* für die Bewegung des starren Körpers hergeleitet. In vielen Anwendungen sind diese Differentialgleichungen für gegebene Kräfte bzw. Drehmomente zu lösen, was durchaus recht kompliziert sein kann. Ist die Bewegung bereits bekannt bzw. vorgeschrieben, so lassen sich die Euler-Gleichungen in umgekehrter Weise dazu nutzen, die wirkenden Kräfte bzw. Drehmomente zu berechnen, die bei der Bewegung auftreten. Darin besteht das Ziel der folgenden Aufgabe.

Die Kollermühle ist eine mechanische Vorrichtung zum Mahlen körniger Substanzen. Sie besteht aus einer vertikalen Achse, an die eine horizontale Achse befestigt ist. Auf dieser sitzt (im Abstand d) ein schwerer, radförmiger Mühlstein (vom Radius r), der auf einer Bodenplatte (entlang eines Kreises) abrollt, und das darauf befindliche Mahlgut zerquetscht.
Berechnen Sie die Normalkraft (d.h. die vertikale Kraft), welche die Bodenplatte auf den Mühlstein ausübt, wenn sich die Apparatur mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse dreht und der Mühlstein dabei schlupffrei (d.h. ohne zu Rutschen) abrollt. Worin besteht der "Gag" der Kollermühle?

Bearbeiten Sie die Aufgaben in der Reihenfolge 5.2, 5.3, 5.4, 5.1.