Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 13. Mai 2009

Mathematische Modellierung

2. Aufgabenserie

Aufgabe 2.1: Asymptotische Untersuchungen

a) In der Vorlesung wurden die Funktionen

$$D_1(\alpha) := \frac{1}{\sin\alpha}(1+\sin\alpha) \quad \text{und} \quad D_{\text{ex}} := \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{1+2\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha^2}$$

definiert. Zeigen Sie:

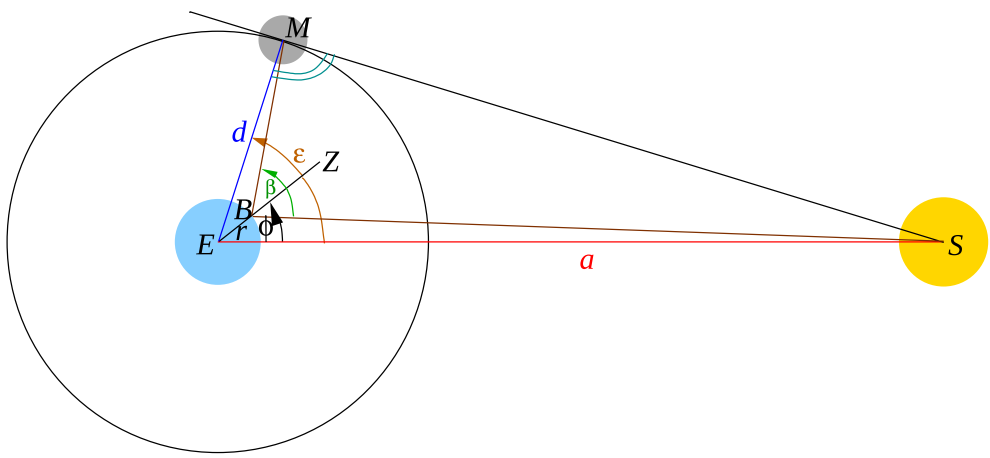
$$D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^2).$$

b) (Zusatzaufgabe) Finden Sie eine Funktion D_2 derart, daß gilt: $D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha) = \mathrm{O}(\alpha^3)$

c) Läßt man in der untenstehenden Skizze den Punkt B entlang der eingezeichneten Linie EZ gegen den Punkt E konvergieren, so strebt der Winkel β gegen den Winkel ϵ. Aufgrund der Steteigkeit des Kosinus konvergiert dann auch $\cos\beta$ gegen $\cos\epsilon$ für $r := \ell(\overline{EB}) \to 0$. Betrachten Sie die Abweichung

$$|\cos\beta - \cos\epsilon|$$

und versuchen Sie herauszufinden, wie "schnell" diese für $r \to 0$ verschwindet.



Aufgabe 2.2: Zur Bestimmung der Mondgröße durch Beobachtung von Mondfinsternissen

a) Bei der Bestimmung der relativen Mondgröße nach Aristarch, wurde explizit angenommen, daß das Sonnenlicht völlig parallel auf die Erde einfällt, so daß sich ein zylindrischer (in der Projektion bzw. in 2D streifenartiger) Erdschatten ergibt. Augrund der Ausdehnung der Sonne und ihres endlichen Abstands von der Erde ist diese Annahme nicht erfüllt. Welcher Fehler ergibt sich dadurch? Wie hätte Aristarch diesen Fehler korrigieren können? Führen Sie beispielhafte Rechnungen mit konkreten Mondfinsternisdaten durch.

b) **(Eine iterative Vorgehensweise durch sukzessive Annäherung)** Angenommen der Mond bewege sich in der Ekliptik um die Erde. Um die Größe (Radius) von Mond und Sonne sowie deren Abstände von der Erde zu ermitteln, könnte man wie folgt vorgehen:

1) Man ermittelt zunächst mit Hilfe der Strahlensätze das Verhältnis des Mondradius zum Abstand Erde-Mond. (Es werde angenommen, daß eine analoge Messung für die Sonne mit bloßen Augen nur sehr ungenau durchgeführt werden kann, da man dazu direkt in die Sonne schauen muß.)

2) Mit dem Verfahren von Aristarch bestimmt man sodann das Verhältnis Mond- zu Erddurchmesser unter der Annahme, daß die Sonne von der Erde unendlich weit weg ist und daher das Sonnenlicht parallel auf der Erde trifft. Unter Verwendung von 1) erhält man so erste Werte ρ_1, d_1 für den Mondradius und Mondabstand.

3) Desweiteren werde der Winkel ϵ bestimmt (siehe obige Skizze), so daß sich ein erster Wert für den Sonnenabstand $a_1 := d_1/cos(\epsilon)$ berechnen läßt. Es werde angenommen, daß der Mond die Sonne bei einer Sonnenfinsternis genau überdeckt. Somit läßt aus dem Mondradius ρ_1 und a_1 der Sonnenradius R_1 berechnen.

4) Da die Sonne einen endlichen Abstand hat und die Erde an Größe übertrifft, verjüngt sich der Erdschatten mit zunehmendem Abstand von der Erde. Mit den Meßdaten zur Mondfinsternis und unter Verwendung von a_1 und R_1 lassen sich korrigierte Wert für ρ_2 und d_2 für den Mondradius und Mondabstand errechnen. Diese nutzt man wiederum um genauere Werte a_2 und R_2 fr Sonnenabstand und Sonnenradius zu erhalten. Danach korrigiert man erneut die Mondwerte usw.

Konvergiert diese Methode schließlich gegen die exakten Werte?

c) Überlegen Sie sich, wie man die Neigung der Mondbahn gegenüber der Ekliptik bei der Bestimmung der Mondgröße nach Aristarch berücksichtigen könnte.

Diese Aufgabe (insbesondere b) und c)) ist vergleichsweise umfangreich und eher als mögliche Projektaufgabe gedacht. Wer will, kann sich aber schon jetzt daran versuchen.

Aufgabe 2.3: Zu den Strahlensätzen

Die folgenden Aufgaben sind einem Mathematik-Schulbuch für die Mittelstufe entnommen.

a) Formulieren und beweisen Sie die Strahlensätze.

b) Wie kann man mit Hilfe der Strahlensätze die Breite eines Flusses messen, ohne diesen zu überqueren?

c) **(Vorwärtseinschneiden)** Ein unzugänglicher Punkt P wird von den Endpunkten einer Standlinie $\overline{AB}$ gepeilt, wobei man die Winkel $\angle(PAB)$ und $\angle(PBA)$ mißt. Wie lassen sich die Längen der Strecken $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ mit Hilfe der Ähnlichkeitsätze für Dreiecke bestimmen?

d) **(Rückwärtseinschneiden nach zwei Punkten)** Um die Entfernung zweier Punkte P und Q zu bestimmen, zwischen denen ein Hindernis liegt, peilt man von P und Q aus je zwei bekannte Punkte A und B an und bestimmt die Winkel $\angle(APQ)$, $\angle(BPQ)$, $\angle(AQP)$ und $\angle(BQP)$. Aus einer Karte bekannten Maßstabs entnimmt man $\ell(\overline{AB})$. Wie läßt sich $\ell(\overline{PQ})$ ermitteln?