



Mathematische Modellierung

4. Aufgabenserie

Aufgabe 4.0: Integration über die Kugel S^2

- a) Die Oberfläche der Einheitskugel $S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$ wird durch die Abbildung

$$[-\pi, \pi) \times [0, \pi] \ni (\phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

parametrisiert. Geben Sie die Parametrisierungen der Schnitte mit den acht Oktanten an, indem Sie die Definitionsmengen der Parameter (Winkel) ϕ und θ geeignet einschränken.

- b) Mit den üblichen Definitionen des *Azimuthalwinkels* ϕ und des *Polarwinkels* θ betrachte man die auf der Einheitskugel definierte Funktion f mit $f(\phi, \theta) := \sin(\phi)^2 \cos(\theta)$. Berechnen Sie das Integral dieser Funktion über mindestens zwei der oben erwähnten Schnitte sowie über den Streifen zwischen den beiden "Polarkreisen" (Breitenkreise zu den Breitenwinkeln $\pm 66.5^\circ$).

Aufgabe 4.1: Wiederholung der Vorlesung: Strahldichte eines Lambert-Strahlers

Mit Hilfe der **Strahldichte** (Strahlungsdichte) ℓ läßt sich die von einem (glatten) Flächenstück $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ ausgehende Strahlung präzise beschreiben. Grob gesagt, gibt die Strahldichte die Orts- und Richtungsabhängigkeit der Strahlung an, die $\mathcal{F}$ aussendet. Somit hängt ℓ von zwei Argumenten¹ ab: von dem Ortsvektor $\mathbf{y} \in \mathcal{F}$ und dem Richtungsvektor $\mathbf{d} \in S^2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. Der Richtungsvektor $\mathbf{d}$ ist jedoch nicht beliebig in S^2 wählbar. Bezeichnet $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ den Normalenvektor an das Flächenstück $\mathcal{F}$ in $\mathbf{y}$, so muß der Winkel zwischen $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ und $\mathbf{d}$ kleiner (gleich) $\pi/2$, d.h. 90° , sein, wenn wir davon ausgehen, daß das Flächenstück nur zu einer Seite hin Strahlung abgibt². Die in $\mathbf{y}$ zulässigen Strahlungsrichtungen $\mathbf{d}$ sind also durch folgende Bedingung charakterisiert:

$$\langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{d} \rangle \geq 0.$$

Die Strahldichte ist eine nicht-negative Funktion. Dabei entspricht

$$\ell(\mathbf{y}, \mathbf{d}) \Delta a(\mathbf{y}) \Delta \Omega(\mathbf{d}) \quad (1)$$

ungefähr der Strahlungsleistung, die von einem kleinen Flächenstück mit dem Flächeninhalt Δa um $\mathbf{y}$ in den Raumwinkel $\Delta \Omega$ um $\mathbf{d}$ abgegeben wird. Je kleiner Δa und $\Delta \Omega$ desto genauer gibt (1) die Strahlungsleistung an. Durch Integration über alle zulässigen Strahlungsrichtungen erhält man die gesamte Strahlungsleistung, die das Flächenstück in den Halbraum abstrahlt:

$$\int_{\{\mathbf{d} \in S^2 \mid \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{d} \rangle \geq 0\}} \ell(\mathbf{y}, \mathbf{d}) \Delta a(\mathbf{y}) d\Omega(\mathbf{d}).$$

Die Größe

$$m(\mathbf{y}) := \int_{\{\mathbf{d} \in S^2 \mid \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{d} \rangle \geq 0\}} \ell(\mathbf{y}, \mathbf{d}) d\Omega(\mathbf{d}). \quad (2)$$

wird als **spezifische Ausstrahlung** bezeichnet. Das obige Integral stellt ein Oberflächenintegral über eine Hälfte der Einheitskugel dar, welche symmetrisch zum Normalenvektor $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ liegt, der hier als Achsenvektor fungiert. Für die Berechnung des Integrals ist es vorteilhaft, Kugelkoordinaten zu wählen, deren

¹Darüberhinaus hängt die Strahldichte auch noch von der Zeit ab, wenn sich die Ausstrahlung zeitlich verändert. Die *spektrale Strahldichte* ist zusätzlich eine Funktion der Frequenz ν bzw. Wellenlänge λ .

² $\mathcal{F} \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{n}(\mathbf{y})$ wird als eine stetige Funktion angenommen, so daß "Vorder-" und "Rückseite" des Flächenstücks wohldefiniert sind.

Polarachse (z -Achse) in Richtung von $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ weist.

Definition: Eine (strahlende) Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein **Lambert-Strahler**, falls ihre Strahldichte von der Form

$$\ell(\mathbf{y}, \mathbf{d}) = \mu(\mathbf{y}) \langle \mathbf{n}(\mathbf{y}), \mathbf{d} \rangle \quad (3)$$

ist, wobei $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ eine nicht-negativwertige Funktion ist

- Wie Winkel über die Bogenlänge von Abschnitten des Einheitskreises definiert sind, so sind Raumwinkel über die Flächeninhalte von Flächenstücken der Einheitskugel erklärt. Versuchen Sie sich mit dem Begriff des Raumwinkels vertraut zu machen.
- Übersetzen Sie die obige Darstellung von 3D nach 2D (ein Flächenstück wird dann zu einer Linie, der Raumwinkel wird zum Winkel usw.) und fertigen Sie eine erklärende Skizze an.
- Berechnen Sie die spezifische Ausstrahlung eines Lambert-Strahlers. Wie unterscheidet sich der 2D vom 3D Fall?

Mit der vektorwertigen **Strahlungsstromdichte** $\mathbf{j} : \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ läßt sich die Strahlung in einem Teilvolumen $\mathcal{V}$ beschreiben. Betrachten wir um einen Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ein kleines Flächenstück mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ und dem Flächeninhalt Δa , so ist die Energie, welche das Flächenstück pro Zeiteinheit durchströmt (bzw. auf dieses trifft), analog zu (??) annähernd gegeben durch

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{j}(\mathbf{x}) \rangle \Delta a.$$

- Auf die Ebene $\mathcal{F} := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ trifft Strahlung mit der homogenen (d.h. räumlich konstanten) Strahlungsstromdichte $\mathbf{j}_{\text{in}}(\mathbf{x}) = I_0 \mathbf{e}_1$ wobei $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^\top$. Nehmen Sie an, es handle sich bei der Ebene um einen Lambert-Strahler. Berechnen Sie die resultierende Strahldichte unter der Annahme, daß die Ebene sämtliches Licht streut und nichts absorbiert.
- (Zum Weiterdenken) Durch die Streuung der einfallenden Strahlung entsteht ein "auslaufendes" Strahlungsfeld beschrieben durch die Strahlungsstromdichte $\mathbf{j}_{\text{out}}$. Versuchen Sie dieses zu berechnen. Welche effektive Strahlungsstromdichte und Energiedichte ergibt sich durch die Überlagerung?

Aufgabe 4.2: Helligkeitsunterschied zwischen Halb- und Vollmond

Wie viel mehr Licht strahlt der Vollmond der Erde bzw. einem irdischen Beobachter zu als der Halbmond? Anders ausgedrückt: Welcher Intensitätsunterschied besteht zwischen Voll- und Halbmond?

Es bezeichne

- r den Mondradius,
- a das *Albedo* des Mondes, d.h. der Bruchteil des einfallenden Lichts, welcher vom Mond gestreut wird.
- I_0 die Intensität des Sonnenlichts, das als zur z -Achse antiparalleles Strahlenbündel auf den Mond trifft, dessen Mittelpunkt mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfällt.

$$J_{\text{halb}} = \frac{aI_0r^2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

$$J_{\text{voll}} = \frac{aI_0r^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\langle \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

J_{halb} bzw. J_{voll} entsprechen der vom Mond in x - bzw. z -Richtung gestreuten Strahlungsleistung. Berechnen und vergleichen Sie die Integrale und interpretieren Sie die Ergebnisse. Wiederholungsaufgabe: Begründen Sie das Zustandekommen der Integrale.

Projektaufgabe: Inwieweit unterscheiden sich die obigen Fragen. Welche Näherungen fließen ein, wenn man die beiden Integrale zur Beantwortung der Fragen benutzt. Wie sähe eine exakte Berechnung aus? Warum sind die Näherungen gerechtfertigt?