Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 12. Juni 2009

Mathematische Modellierung

5. Aufgabenserie

Aufgabe 5.1: Flächenelement der Kugel (Anschaulicher Zugang)

Die Abbildung (Parametrisierung) $\boldsymbol{s} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{s}(\theta, \phi) := r \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

bildet das Rechteck $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}^2$ auf die Sphäre vom Radius r ab, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt. Die Variablen θ und ϕ werden als *Polarwinkel* bzw. *Azimutalwinkel* bezeichnet. Das *Fächenelement* an der Stelle $\boldsymbol{s}(\theta, \phi)$ zu den Winkelinkrementen $\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}\phi$ entspricht dem Kugelviereck $\boldsymbol{s}([\theta, \theta+\mathrm{d}\theta] \times [\phi, \phi+\mathrm{d}\phi])$, welches durch die Punkte $\boldsymbol{s}(\theta, \phi)$, $\boldsymbol{s}(\theta+\mathrm{d}\theta, \phi)$, $\boldsymbol{s}(\theta, \phi+\mathrm{d}\phi)$ und $\boldsymbol{s}(\theta+\mathrm{d}\theta, \phi+\mathrm{d}\phi)$ aufgespannt[1] wird. Im folgenden nehmen wir an, daß die Winkelinkremente $\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}\phi$ sehr klein sind. Dann liegen die vier Punkte fast in einer Ebene.

a) Begründen Sie, warum das Flächenelement annähernd einem Rechteck mit den Seitenlängen $r\mathrm{d}\theta$ und $r \sin\theta \mathrm{d}\phi$ gleichkommt, so daß sein Flächeninhalt ungefähr durch

$$\mathrm{d}a = r\mathrm{d}\theta \, r \sin\theta \mathrm{d}\phi = r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \tag{1}$$

gegeben ist und vergleichen Sie dies mit dem “exakten Flächeninhalt”:

$$\int_{\phi}^{\phi+\mathrm{d}\phi} \int_{\theta}^{\theta+\mathrm{d}\theta} r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi.$$

b) Betrachten Sie die ebenen Dreiecke, welche jeweils durch drei der vier Punkte aufgespannt werden und bestimmen Sie deren Flächeninhalt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit (1).

c) Betrachten Sie die Ebenen, welche durch drei der vier Punkte festgelegt sind und berechnen Sie jeweils den Abstand des vierten Punkts. Wie nimmt der Abstand mit $\mathrm{d}\theta$ und $\mathrm{d}\phi$ ab? **Bemerkung:** Der Abstand kann als ein Maß für die “Ebenheit” des Kugelvierecks angesehen werden.

Bermerkung: Der Faktor $r^2 \sin\theta$ kann als Flächenverzerrungsfakor gedeutet werden, der angibt, wie sich der Flächeninhalt des Rechtecks $[\theta, \theta+\mathrm{d}\theta] \times [\phi, \phi+\mathrm{d}\phi]$ gegebenüber seinem Bild $\boldsymbol{s}\big([\theta, \theta+\mathrm{d}\theta] \times [\phi, \phi+\mathrm{d}\phi]\big)$ verändert.

Aufgabe 5.2: Strahlungscharakteristik eines Nicht-Lambertschen Strahlers

In Aufgabe 4.2 stellte sich heraus, daß die Lichtmenge, die der Vollmond auf die Erde streut, mehr als dreimal (π-mal) so groß ist wie die Lichtmenge, welche die Erde vom Halbmond erhält. Dieses Ergebnis ergab sich unter der Annahme, daß der Mond ein Lambert-Strahler ist. Tatsächlich soll die vom Halbmond auf die Erde treffende Lichtmenge im Vergleich zum Vollmond noch deutlich weniger als $\frac{1}{\pi}$ betragen. Dies ließe sich dadurch erklären, daß der Mond doch kein idealer Lambert-Strahler ist und eine entsprechend geringere Lichtmenge “zur Seite streut”.

[1] Den Geraden in der Ebene entsprechen die Großkreise auf der Kugel. In beiden Fällen liefern sie die kürzesten Verbindungslinien zwischen zwei Punkten. Derartige Verbindungslinien bezeichnet man auch als *Geodätische*. Im strengen Sinne handelt es sich bei $\boldsymbol{s}([\theta, \theta + \mathrm{d}\theta] \times [\phi, \phi + \mathrm{d}\phi])$ nicht um ein Kugelviereck, denn die Breitenkreise, die es nach Norden und Süden begrenzen, sind im Gegensatz zu den Längenkreisen keine Großkreise (Ausnahme: Äquator). Somit ist $\boldsymbol{s}([\theta, \theta + \mathrm{d}\theta] \times [\phi, \phi + \mathrm{d}\phi])$ nicht “geradlinig” begrenzt. Man könnte jedoch die aus den Breitenkreisabschnitten bestehenden Vierecksseiten durch Großkreisabschnitte approximieren. Da der Flächeninhalt von Kugeldreiecken auch ohne Integralrechnung berechnet werden kann, ließe sich der Flächeninhalt des resultierenden tatsächlichen Kugelvierecks exakt berechnen und mit (1) vergleichen.

Überlegen Sie sich möglichst einfache Strahlungscharakteristiken (Strahldichten), bei denen weniger Licht seitlich gestreut wird als beim Lambert-Strahler. Versuchen Sie damit die Integrale für J_{halb} und J_{voll} analog zu Aufgabe 4.2 zu berechnen, um den relativen hypothetischen Intensitätsunterschied zwischen Voll- und Halbmond zu ermitteln.
Bemerkung: Da das menschliche Helligkeitsempfinden nicht linear sondern eher logarithmisch mit der einfallenden Lichtmenge zunimmt (Weber-Fechner Gesetz der Psychophysik), nehmen wir den Intensitätsunterschied zwischen Voll- und Halbmond weniger stark wahr, als er tatsächlich ist.

Aufgabe 5.3: Berechnung eines Integrals

Bei der Herleitung des Zusammenhangs zwischen der *Strahldichte* ℓ und der *Energiedichte* ρ ergab sich für den Fall eines (zweidimensionalen) Lambert-Strahlers mit "konstanter Amplitude" das Kurvenintegral

$$I(\boldsymbol{x}) := \int_\Gamma \frac{\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})\rangle}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2}\,\mathrm{d}s(\boldsymbol{y}). \tag{2}$$

Dabei steht der Integrationsbereich Γ für eine geschlossene (stückweise differenzierbare) Kurve, die den inneren Punkt $\boldsymbol{x}$ umschließt. $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})$ bezeichnet den an der Stelle $\boldsymbol{y} \in \Gamma$ nach innen weisenden Normalenvektor. Da sich der Integrand als Projektion der Kurve Γ auf den Einheitskreis um $\boldsymbol{x}$ rein geometrisch deuten läßt, macht man sich leicht plausibel, daß das Integral den Wert 2π annimmt (Umfang des Einheitskreises!) unabängig von $\boldsymbol{x}$ und Γ.

Versuchen Sie, das Integral für einen Spezialfall möglichst analytisch (ggf. auch numerisch) zu berechnen. Konkret wähle man für Γ den Einheitskreis um den Nullpunkt mit Radius r:

$$[0,2\pi] \ni \psi \mapsto \boldsymbol{y}(\psi) = r\begin{pmatrix}\cos\psi\\ \sin\psi\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} \boldsymbol{n}\big(\boldsymbol{y}(\psi)\big) = -\binom{\cos\psi}{\sin\psi} \\ \mathrm{d}s\big(\boldsymbol{y}(\psi)\big) = r\mathrm{d}\psi \end{cases}$$

Sei $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^\top$ ein beliebiger Punkt im Inneren des Kreises, d.h. $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r^2$. Setzt man alle Größen in das Integral (2) ein, so ergibt ein ganz gewöhnliches Integral

$$I(\boldsymbol{x}) = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - r\cos\psi \\ x_2 - r\sin\psi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\cos\psi \\ -\sin\psi \end{pmatrix} \right\rangle \Big[(x_1 - r\cos\psi)^2 + (x_2 - r\sin\psi)^2\Big]^{-1} r\mathrm{d}\psi,$$

welches sich mit dem Handwerkszeug aus Analysis I "attackieren" kann. Im Falle von $(x_1, x_2)^\top = (0,0)^\top$ ist das Integral sehr leicht zu berechnen. Für $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ wird das Auffinden einer Stammfunktion dagegen deutlich komplizierter. **Hinweis:** Verwenden Sie eine geeignete Substitution, die den Integranden in eine gebrochen-rationale Funktion überführt.

Aufgabe 5.4: Anwendungen des Stefan-Boltzmann Gesetzes

In dieser Aufgabe soll es um zwei aktuelle Themen gehen, nämlich alternative Energien und Ernährung. Es soll abgeschätzt werden, wieviel Energie die Sonne liefert. Ebenso soll der tägliche Kalorienverbrauch eines Menschen berechnet werden. In beiden Rechnungen geht es aufgrund der sehr vereinfachten Modellannahmen vor allem darum, eine Vorstellung von der Größenordnung der Werte zu bekommen.

Es bezeichne ℓ die spektrale (d.h. frequenzabhängige) Strahldichte einer Strahlungsquelle $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Die pro Zeiteinheit abgestrahlte Gesamtenergie ist dann durch das folgende Mehrfachintegral

$$\int_{\partial\Omega}\int_{S^2}\int_0^\infty \ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{d},\nu)\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}a(\boldsymbol{d})\,\mathrm{d}a(\boldsymbol{y}) \tag{3}$$

gegeben, wobei $\partial\Omega$ für den Rand von Ω steht (Oberflächenintegral). Nehmen Sie an, die Lichtquelle sei ein Lambertstrahler mit einer räumlich konstanten Amplitude μ, welche eine nicht-negative Funktion der Frequenz ν ist. Dann hat die Strahldichte die folgende Gestalt:

$$\ell(\boldsymbol{y},\boldsymbol{d},\nu) = \mu(\nu)\langle \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{d}\rangle.$$

0) Inwieweit vereinfacht sich (3) unter dieser Annahme. Versuchen Sie das Integral soweit wie möglich auszuwerten.

Das Plancksche Gesetz

$$\rho(\nu, T) = \frac{8h\pi\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{kT}) - 1} \tag{4}$$

beschreibt die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung, welche sich im thermischen Gleichgewicht in einem von *schwarzen Wänden* der Temperatur[2] T umgebenen Hohlraum ausbildet. (4) enthält drei wichtige physikalische Konstanten: die Lichtgeschwindigkeit (im Vakkum) $c = 299792458\,\mathrm{ms}^{-1}$, das Plancksche Wirkungsquantum $h = 6.6260688 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$ und die Boltzmann-Konstante $k = 1.38065 \cdot 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$. In der Vorlesung wurde der Zusammenhang zwischen der Energiedichte ρ und der Lambert-Amplitude μ hergeleitet. Es gilt in zwei bzw. drei Dimensionen:

$$\text{2D:}\;\; \mu = \frac{c}{2\pi}\rho, \qquad \text{3D:}\;\; \mu = \frac{c}{4\pi}\rho.$$

a) Die abgestrahlte Strahlungsleistung eines schwarzen Körpers ist propotional zu T^4. Bestimmen Sie den Propotionalitätsfaktor für die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit (Stefan-Boltzmann Konstante), indem Sie die Rechnung der Vorlesung zu Ende führen. **Bemerkung:** Dabei ergibt sich das folgende Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

b) **(Energieabstrahlung der Sonne)** Wie groß ist die absolute Strahlungsleistung der Sonne, wenn man diese als einen schwarzen Körper mit der Oberflächentempertaur $T = 5785\mathrm{K}$ modelliert? Welcher Anteil davon erreicht die Erde? Wie groß ist die Strahlungsleistung, die bei einem Sonnenstand von $60°$ über dem Horizont auf ein Quadratmeter Erde fällt, wobei die Absorptionswirkung der Atmossphäre außer Acht bleiben soll. Kann ein durchtrainierter Sportler diesen Leistungswert überbieten?

   Benötigte Angaben: Sonnenradius $696000\,\mathrm{km}$, Sonnenabstand $150 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$, Erdradius $6371\,\mathrm{km}$.

c) **(Kalorienverbrauch des menschlichen Körpers)** Die nackte Haut verliert im wesentlichen Strahlungswärme. Betrachten Sie die Haut als schwarzen Strahler mit einer Temperatur von $37°\mathrm{C}$ und einer Oberfläche von ein bis zwei Quadratmetern. Berechnen Sie die Verlustleistung des menschlichen Körpers aufgrund von Wärmeabstrahlung als Funktion der Umgebungstemperatur. Welcher Kalorienverbrauch ergibt sich?

   Bemerkung: Es ist zu beachten, daß ein schwarzer Strahler sämtliche Strahlung absorbiert, die auf ihn trifft (daher der Name!). Berücksichtigen Sie daher auch die Strahlungsenergie, die von der Umgebung abgestrahlt wird.

Aufgabe 5.5: Der RGB-Frabwürfel

Basteln Sie ein Modell des RGB-Farbwürfels. Das Farbürfelnetz kann von der Vorlesungshomepage heruntergeladen werden. Sie müssen es nur noch ausdrucken. Viel Spaß.

[2] In Kelvin angegeben. Dabei ergibt sich der Kelvin Wert durch Addition von 273,2 zum Celsius Wert.