

## Mathematische Modellierung 6. Aufgabenserie

### Aufgabe 6.1: Vier-Personen-Tanz revisited.

Vor einigen Wochen wurde in der Vorlesung das Anfangswertproblem

$$\mathbf{z}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{G}(\mathbf{z}) := c \frac{R\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)}{\|R\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(t)\|} \quad \text{mit } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

für eine Funktion  $\mathbf{z} : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  diskutiert. Der Lösungsweg bestand im wesentlichen darin, die Differentialgleichung in Polarkoordinaten zu betrachten.

Das Anfangswertproblem (1) läßt sich tatsächlich auch in kartesischen Koordinaten lösen. Dazu bedarf es allerdings eines Tricks, der den folgenden “Umweg” erfordert. Zunächst ist das modifizierte Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}) := (R\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t)) \quad (2)$$

zu lösen. Da es sich hier um eine lineare Differentialgleichung handelt (die rechte Seite hängt linear von  $\mathbf{y}$  ab), kann die Lösung mit Standardmethoden (Stichwort: Exponentialmatrix, siehe Analysis III) berechnet werden. Auf diese Weise findet man für  $\mathbf{y} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  die explizite Darstellung

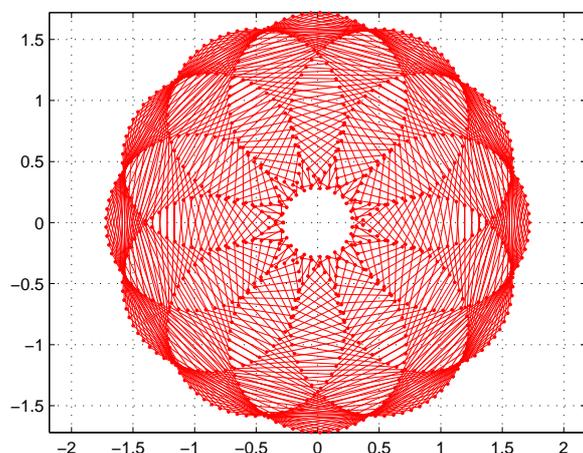
$$\mathbf{y}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Berechnen Sie daraus die Lösung zu (1).

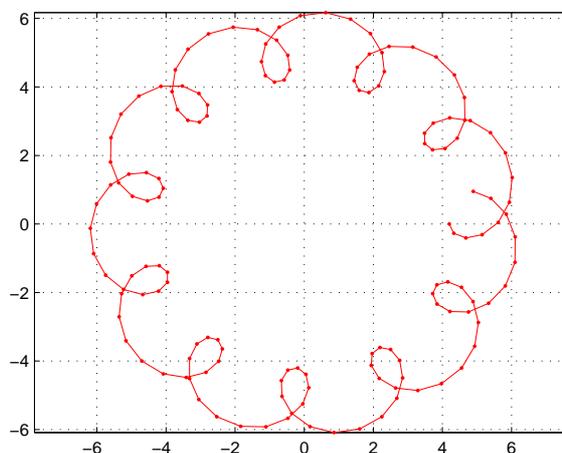
**Hinweis:** Warum sollten Sie zunächst die Bogenlänge (als Funktion des Parameters) der in Gleichung (3) angegebenen Lösungskurve zu (2) bestimmen?

### Aufgabe 6.2: Planetenbahnen von der Erde aus gesehen

Geben Sie die allgemeine Parametrisierung einer Bahnkurve an, die ein Planet durchläuft, wenn er von der Erde aus beobachtet wird. Es soll angenommen werden, daß sich Erde und Planet auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen, die in einer gemeinsamen Ebene liegen.



Bahn der Venus während 100 Jahren.



Bahn des Jupiter während 12 Jahren.  
Benachbarte Punkte entsprechen einem  
Zeitabstand von einem Monat.