Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Dr. M. Rheinländer

12. Mai 2009

Mathematische Modellierung

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1.3 b (Mathematische Definition von Schatten) *Geben Sie eine mathematische Definition an, die sich mit dem physikalischen Phänomen des Schattens assozieren läßt, dabei aber nur auf mathematische Begriffe zurückgreift.*

Physikalisch versteht man unter *Schatten* einen Raumbereich, den die Lichtstrahlen einer Lichtquelle Q nicht erreichen können aufgrund der Präsenz eines lichtundurchlässigen Objekts (Hindernis) H. Umgangssprachlich bezeichnet Schatten vor allem die Projektion dieses Raumbereichs auf eine Fläche (Boden, Schirm), die durch eine verminderte Helligkeit augenfällig ist.

Im folgenden soll die physikalische Definition des Schattens mathematisiert werden. Die physikalische Erscheinung von Lichtstrahlen übersetzt sich in das mathematische Objekt einer Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten im $\mathbb{R}^n$. Ferner werden Lichtquelle und Hindernis zu schlichten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ "degradiert", die sich in nichts als ihrer Beziehung zum Schatten unterscheiden. Tatsächlich läßt sich Schatten als Raumbereich nicht unabhängig definieren sondern bezieht sich immer auf eine Lichtquelle und ein Hindernisobjekt, die ebenfalls Raumbereiche darstellen bzw. ausfüllen.

Definition (Verbindungsstrecke): Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^n$

$$S[x,y] := \Big\{(1-\tau)x + \tau y \mid \tau \in [0,1]\Big\}.$$

Verbindungsstrecke zwischen x und y.

Definition: Es seien $Q, H \subset \mathbb{R}^n$ disjunkt, d.h. $Q \cap H = \emptyset$. Der **(Kern-)Schatten** (engl. *umbra*) $\mathcal{U}_Q(H)$ bzw. der **Halbschatten** (engl. *penumbra*) $\mathcal{P}_Q(H)$ von H bezüglich Q sind dann weitere Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_Q(H) &:= \Big\{z \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \forall q \in Q : \; S[q,z] \cap H \neq \emptyset\Big\}, \\ \mathcal{P}_Q(H) &:= \Big\{z \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \exists q \in Q : \; S[q,z] \cap H \neq \emptyset\Big\}. \end{aligned}$$

Man beachte den Unterschied bei der Verwendung der Quantoren. Offenbar gilt: $H \subset \mathcal{K}_Q(H) \subset \mathcal{P}_Q(H)$.

Es ist nun interessant zu schauen, inwieweit diese Definitionen mit unserer Alltagserfahrung übereinstimmen bzw. wo "pathologische Fälle" zu Abweichungen davon führen, welche gegebenenfalls Modifikationen der obigen Definitionen nahelegen. Kann es z.B. sein, daß Q teilweise im Kern- oder Halbschatten enthalten ist, also $\mathcal{U}_Q(H) \cap Q \neq \emptyset$ oder $\mathcal{P}_Q(H) \cap Q \neq \emptyset$? Anschaulich gesprochen: Können Teile der Lichtquelle zum Schatten gehören? Man beachte dazu, daß an Q keinerlei Voraussetzungen gestellt werden, wie etwa Zusammenhang, Wegzusammenhang, Konvexität etc.. Wie ließe sich diese Seltsamkeit ausschließen?

Aufgabe 1.4 c (Zur Lage der Umlaufbahn des Mondes) *Angenommen der Mond umlaufe die Erde auf einer kreisförmigen Bahn, deren Radius* 60.33 *Erdradien entspricht. Ferner sei die Bahn des Mondes um* $5.1°$ *gegenüber der Ekliptik geneigt. Wie verhält sich der Anteil der Mondbahn, auf welcher eine Mondfinsternis prinzipiell nicht möglich ist, zur Gesamtlänge der Bahn?*

Der Einfachheit halber können wir bei der Betrachtung von Erde, Sonne und Mond von einer *geozentrischen Beschreibung* ausgehen (warum?). Dazu nimmt man an, daß Mond und Sonne um eine feststehende Erde kreisen. Desweiteren werde zunächst angenommen, daß die Erde nur von *parallelen* Sonnenlicht bestrahlt wird, so daß ihr Schatten *zylinderförmig* ist, wobei der Radius des Zylinders gerade dem Erdradius[1] entspricht. Die Ebene, in der die Sonne, genauer gesagt ihr Mittelpunkt, die Erde umkreist wird *Ekliptik* genannt. Die *potentielle Schattenzone* ergibt sich als der Raumbereich, welcher vom Erdschatten überstrichen wird, wenn man die Sonne um die Erde kreisen läßt. Um die *potentielle Schattenzone* quantitativ genauer zu beschreiben, führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Erde liegt und dessen x- und y-Achse die Ekliptik aufspannen, so daß die z-Achse senkrecht zur Ekliptik steht. Bezeichnet R den Erdradius, so ist die potentielle Schattenzone offenbar durch folgenden Menge

$$\mathcal{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -R \leq z \leq R\}$$

gegeben. $\mathcal{S}$ ist die Menge aller Punkte, welche zwischen den beiden zur Ekliptik parallenen Ebenen $z = -R$ und $z = R$ liegen, oder anders ausgedrückt, die Menge aller Punkte, deren Abstand zur Ekliptik kleiner gleich R ist. Die potentielle Schattenzone hat somit die Gestalt einer unendlich ausgedehnten Platte (engl. *slab*) der Dicke $2R$, deren Mittelebene gerade mit der Ekliptik zusammenfällt.

In Anlehnung an die eigentliche Aufgabenstellung erhebt sich die Frage, welcher Anteil der Mondumlaufbahn innerhalb bzw. außerhalb der potentiellen Schattenzone $\mathcal{S}$ liegt. Um das Verhältnis zu berechnen, gehen wir von der weiteren **Annahme** aus, daß sich der Mond auf einer Kreisbahn um die Erde bewegt, welche in einer gegenüber der Ekliptik um $5.1°$ geneigten Ebene liegt.

Der obere Teil der Abbildung 1 stellt einen Schnitt durch den Raum dar, wobei die Schnittebene sowohl senkrecht zur Ekliptik wie zur Ebene der Mondumlaufbahn gewählt ist. Die blaue Linie markiert die Schnittlinie der Zeichenebene mit der Ekliptik, während die Schnittlinie mit der Ebene der Mondumlaufbahn entlang der beigen Linie verläuft. Der Schnittpunkt M von blauer und beige Linie soll dem Erdmittelpunkt entsprechen, wodurch die Zeichenebene nun eindeutig festgelegt ist.
Die Schnittlinie von Ekliptik und Ebene der Mondumlaufbahn – auch als *Knotenlinie* bezeichnet – muß senkrecht zur Zeichenebene stehen, da die Linie in beiden Ebenen enthalten ist, zu denen die Zeichenebene senkrecht steht. Genau im im Erdmittelpunkt M wird die Zeicheneben von der Knotenlinie durchstoßen. Schließnlich ergibt sich der grau schraffierte Streifen als Querschnitt durch die potentielle Schattenzone $\mathcal{S}$.

Die beige Strecke AB stellt die Projektion der Mondumlaufbahn in der Zeichenebene dar. Als solche entspricht sie einem Durchmesser der Umlaufbahn. Ihre Länge kommt daher dem zweifachen Radius gleich, welcher durch den Abstand (Distanz) d zwischen Erde und Mond gegeben ist. Räumlich betrachtet ergibt sich die Mondumlaufbahn durch zwei Halbkreisbögen, die sich senkrecht oberhalb bzw. unterhalb der beigen Linie zwischen ihren Enden wölben.
Die Abschnitte der Mondumlaufbahn innerhalb der potentiellen Schattenzone ergeben in der Projektion die beiden gleichlangen Strecken MC und MD. Ihre Länge s berechnet sich bei bekanntem Neigungswinkel ν und Erdradius R nach der Formel

$$s = \frac{R}{\sin \nu} . \tag{1}$$

Analog projizieren sich die Abschnitte der Mondumlaufbahn außerhalb der potentiellen Schattenzone auf die Strecken AC und DB, deren Länge jeweils $d - s$ sein muß.
Um nun die Länge der Kreisabschnitte zu ermitteln, welche den Strecken AC,MC,MD,und BD zugeordnet sind, zeichnen wir einen Kreis mit Radius d, dessen Mittelpunkt M' direkt unterhalb von M liegt, d.h. MM' ist orthogonal zur blauen Linie. Der Kreis entspricht der Umlaufbahn des Mondes, diesmal jedoch in der Aufsicht auf die Ebene seiner Umlaufbahn betrachtet. Die weitere Vorgehensweise besteht nun im Prinzip darin, einen Durchmesser $A'B'$ einzuzeichnen, vom Mittelpunkt M' ausgehend die Strecken $M'C'$ und $M'D'$ der Länge s abzutragen und in den Endpunkten Senkrechten zum Durchmesser zu errichten, die den Kreis in jeweils zwei Punkten U, V und W, Y schneiden. Die grünen Kreisabschnitte über den beiden Loten bzw. zwischen den Punkten U, V und W, Y entsprechen den Abschnitten der Mondbahn, welche außerhalb der potentiellen Schattenzone liegen. Dagegen hat die Mondbahn auf den Bahnabschnitten zwischen U, W und V, Y einen Abstand von der Ekliptik, welcher geringer als der Erdradius R ist, so daß sich diese innerhalb der Schattenzone befinden.

[1]Wir betrachten die Erde als Kugel, deren Halbmesser durch den mittleren Erdradius $R = 6371$ km gegeben sein soll. Dabei wählt man für den mittleren Erdradius meist den Radius einer zur tatsächlichen Form der Erde (symmetrischer Ellipsoid, Geoid) inhaltsgleiche bzw. volumengleiche Kugel

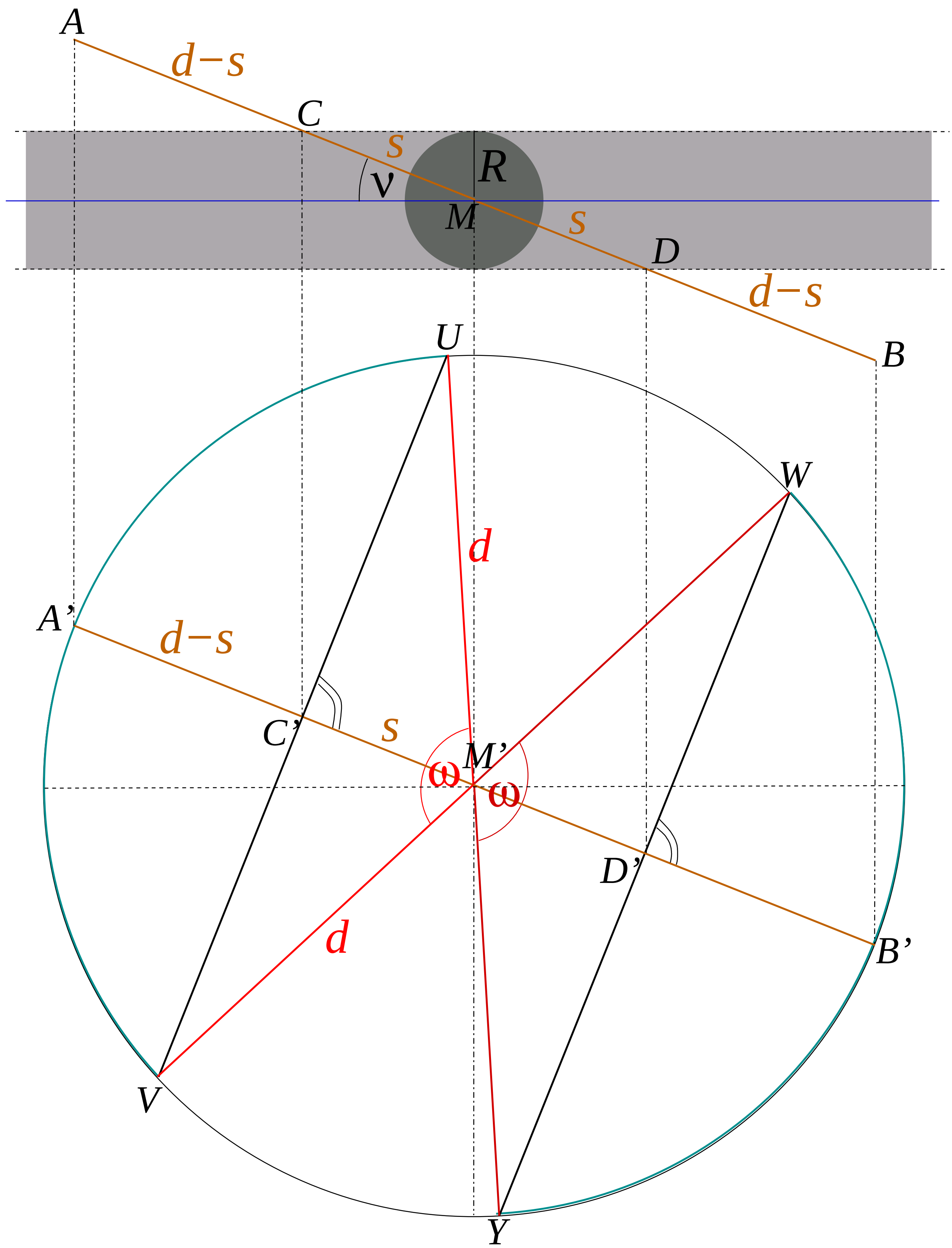

Abbildung 1: Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht. Erläuterung im Text.

Der Zeichnung entnimmt man folgenden Zusammenhang zwischen dem zu den Kreisbögen UV und WY

gehörigen Öffnungswinkel ω sowie dem Radius d und dem Abschnitt s:

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{s}{d}$$

Auflösen nach $\omega \in [0, \pi]$ und Einsetzen von (1) für s liefert

$$\omega = 2\arccos\left(\frac{R}{d\sin\nu}\right).$$

Damit folgt:

$$\frac{\text{Anteil der Mondbahn außerhalb der potentiellen Schattenzone } \mathcal{S}}{\text{Gesamtlänge der Mondbahn}} = \frac{\omega}{\pi} = \frac{2\arccos\left(\frac{R}{d\sin\nu}\right)}{\pi}$$

Legen wir für den Erdradius R und den Mondbahnradius d die mittleren Werte

$$R = 6371\text{km} \qquad d = 384400\text{km} = 60.33R$$

zugrunde, so ergibt sich ein Verhältnis von 0.8806, d.h. 88.06%.

Für eine partielle Mondfinsternis genügt es, daß der Mond den Erdschatten streift. In diesem Fall ist in (1) der Erdradius R durch $R + r$ zu ersetzen. Dagegen muß der Mond bei einer totalen Mondfinsternis vollständig in den Erdschatten eintauchen. Um den Anteil der Mondbahn zu erhalten, wo dies prinzipiell, d.h. bei geeigneter Sonnenstellung möglich ist, ist in Gleichung (1) der Erdradius R durch $R - r$ zu ersetzen. Mit dem Mondradius $r = 1738$ km ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \frac{2\arccos\left(\frac{R+r}{d\sin\nu}\right)}{\pi} &= 0.8475, \\ \frac{2\arccos\left(\frac{R-r}{d\sin\nu}\right)}{\pi} &= 0.9134. \end{aligned}$$

Tatsächlich ist der Durchmesser des Erdschattens im Abstand des Mondes auf etwa Dreiviertel des Erddurchmessers geschrumpft. Somit ist R durch $0.75R$ zu ersetzen:

$$\frac{2\arccos\left(\frac{0.75R}{d\sin\nu}\right)}{\pi} = 0.9107.$$