Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Dr. M. Rheinländer

06. Juni 2009

Mathematische Modellierung
Lösungsvorschlag

Aufgabe 3.1 a) Zum "Tanz" aus dem Mai

An den Eckpunkten eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge L steht jeweils eine Person, welche so aufgestellt ist, daß ihre Blickrichtung entlang einer Kante gegen den Uhrzeigersinn weist. Auf ein Signal hin setzen sich die n Personen zum Zeitpunkt $t = 0$ in Bewegung. Dabei steuert jede Person immer genau in Richtung ihres jeweiligen Vordermanns. Ferner mögen sich alle Personen mit der gleichen Schnelligkeit s bewegen. Berechnen Sie die Trajektorien der n-Personen. Kommt es zu einer Begegnung der Personen? Wenn ja, wo und wann?

Der Lösungsweg orientiert sich an dem Beispiel aus der Vorlesung für den Spezialfall $n = 4$. Dabei sind zwei Schritte entscheidend:

I) Ausnutzung der (diskreten) Rotationssymmetrie $\to$ Reduktion des Differentialgleichungssystems für n-Personen mit $2n$-Unbekannten auf eine "1-Personen-Gleichung" mit 2 Unbekannten.

II) Transformation der 1-Personen-Gleichung in *Polarkoordinaten*.

ad I) Die Personen seien gegen den Uhrzeigersinn von $0, ..., n-1$ durchnummeriert. Zur Beschreibung der Bewegung verwenden wir zunächst ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt des n-Ecks zusammenfällt. Außerdem sei das Koordinatensystem so orientiert, daß die Person mit dem Index $k = 0$ auf der positiven x_1-Achse steht.

Die Positionen der Personen werden durch $\mathbb{R}^2$-wertige Funktionen $\boldsymbol{p}_0, ..., \boldsymbol{p}_{n-1}$ beschrieben. Da für ein n-Eck der Seitenlänge L der Abstand a zwischen den Eckpunkten und dem Mittelpunkt gegeben ist durch

$$a = \frac{L}{2\sin(\frac{\pi}{n})},$$

folgt für die Ausgangsposition der Person mit der Nummer $k = 0$:

$$\boldsymbol{p}_0(0) = a\boldsymbol{e}_1 = \frac{L}{2\sin(\frac{\pi}{n})}\boldsymbol{e}_1,$$

wobei $\boldsymbol{e}_i$ mit $i \in \{1, 2\}$ den Einheitsvektor in Richtung der x_i-Achse bezeichnet. Die Anfangspositionen der anderen Personen ergeben sich durch eine geeignete Rotation von $\boldsymbol{p}_0(0)$. Dazu bezeichne $R(\delta)$ die Rotation im mathematisch positiven Sinne, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, um den Winkel δ mit Drehzentrum im Nullpunkt. Anhand einer Skizze überzeugt man sich schnell, daß $R(\delta)$ die Standardbasis wie folgt abbildet[1]:

$$R(\delta)\boldsymbol{e}_1 = \cos\delta\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_2, \qquad R(\delta)\boldsymbol{e}_2 = -\sin\delta\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\delta\,\boldsymbol{e}_2. \tag{1}$$

Definieren wir $R_n := R(\frac{2\pi}{n})$, so läßt sich die Bewegung der n-Personen in folgendes Anfangswertproblem übersetzen:

$$\boldsymbol{p}_k(0) = aR_n^k\boldsymbol{e}_1, \quad \dot{\boldsymbol{p}}_k(t) = s\frac{\boldsymbol{p}_{k+1}(t) - \boldsymbol{p}_k(t)}{\|\boldsymbol{p}_{k+1}(t) - \boldsymbol{p}_k(t)\|} \qquad \text{für } k \in \{0, 1, ..., n-1\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Die Differentialgleichung beschreibt die Geschwindigkeit der k'ten Person. Diese setzt sich zusammen aus der Schnelligkeit s (Betrag der Geschwindigkeit) und der Richtung, die durch den normierten Verbindungsvektor zum Vordermann, d.h. zur Person mit dem Index $k+1$, gegeben ist.

[1] Man kann $R(\delta)$ auch als durch die beiden Gleichungen definiert ansehen, welche sich aus der Anschauung bzw. Intuition ergeben. Allgemein sind Drehungen als abstands- und orientierungserhaltende Abbildungen definiert. Unter diesen Annahmnen kann man zeigen, daß Drehungen lineare Abbildungen sind und im wesentlichen von der Gestalt sein müssen, wie in (1) angegeben.

Völlig analog zur Vorlesung zeigt man, daß sich aus der Lösung des **reduzierten Anfangswertproblems**

$$\boldsymbol{q}(0) = a\boldsymbol{e}_1, \quad \dot{\boldsymbol{q}}(t) = s\frac{R_n\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{q}(t)}{\|R_n\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{q}(t)\|} \tag{3}$$

die Lösung von (2) ergibt, indem man $\boldsymbol{p}_k = R^k\boldsymbol{q}$ setzt für $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$.

ad II) Zur Berechnung der Lösung von (3) ist es vorteilhaft, die Differentialgleichung in Polarkoordinaten zu transformieren. Zu diesem Zweck rekapitulieren wir zunächst noch einmal den Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten. Die Umrechnungsformeln, welche die kartesischen Koordinaten $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ als Funktion der Polarkoordinaten $(\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [-\pi, \pi)$ darstellen, lauten

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \qquad x_2 = \rho\sin\varphi.$$

Daraus folgt

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 = \rho\,\underbrace{\big(\cos\varphi\boldsymbol{e}_1 + \sin\varphi\boldsymbol{e}_2\big)}_{=:\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)} = \rho R(\varphi)\boldsymbol{e}_1 = \rho\boldsymbol{e}_\rho(\varphi).$$

$\boldsymbol{e}_\rho$ ist der sogenannte Einheitsvektor in *radiale* Richtung im Punkt (ρ, φ). Dieser wird durch den Einheitsvektor in *azimutale* Richtung

$$\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) := R(\tfrac{\pi}{2})\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_1 + \cos\varphi\boldsymbol{e}_2$$

zu einer Orthonormalbasis im $\mathbb{R}^2$ ergänzt. Die beiden Einheitsvektoren entsprechen den normierten Tangentialvektoren an die zwei Koordinatenlinien[2], welche sich im Punkt (ρ, φ) schneiden; d.h.:

$$\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = \frac{\partial}{\partial\rho}\boldsymbol{x}(\rho, \varphi), \qquad \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{x}(\rho, \varphi).$$

Man rechnet leicht nach, daß $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ normiert sind, zueinander senkrecht stehen und durch jeweiliges Ableiten auseinander hervorgehen. Es gelten also die folgenden Rechenregeln

$$\big\langle\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\rho(\varphi)\big\rangle = \big\langle\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)\big\rangle = 1, \qquad \big\langle\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)\big\rangle = 0, \tag{4}$$

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) = \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi), \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi) = -\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \tag{5}$$

von denen wir weiter unten fleißig Gebrauch machen werden.

Bevor wir zur Differentialgleichung (3) zurückkehren, bedarf es noch einer weiteren kleinen Vorbereitung. Unter Anwendung von (1) und der Tatsache, daß ebene Rotationen um einen gemeinsamen Drehpunkt kommutieren, folgt:

$$\begin{aligned} R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) &= R(\delta)R(\varphi)\boldsymbol{e}_1 = R(\varphi)R(\delta)\boldsymbol{e}_1 = R(\varphi)\big[\cos\delta\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_2\big] \\ &= \cos\delta\,R(\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \sin\delta\,R(\varphi)R(\tfrac{\pi}{2})\boldsymbol{e}_1 = \cos\delta\,R(\varphi)\boldsymbol{e}_1 + \sin\delta\,R(\tfrac{\pi}{2})R(\varphi)\boldsymbol{e}_1 \\ &= \cos\delta\,\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi). \end{aligned} \tag{6}$$

Man beachte, daß sich das Bild von $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$ unter der Drehung $R(\delta)$ analog zum Bild von $\boldsymbol{e}_1$ ergibt, indem man in (1) $\boldsymbol{e}_1$ durch $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$ und $\boldsymbol{e}_2$ durch $\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ ersetzt. Entsprechend geht $R(\delta)\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ aus $R(\delta)\boldsymbol{e}_2$ hervor. Der Grund dafür besteht darin, daß die beiden Orthonormalbasen $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ und $(\boldsymbol{e}_\rho(\varphi), \boldsymbol{e}_\varphi(\varphi))$ durch eine Drehung ineinander überführt werden können, welche mit $R(\delta)$ kommutiert. Da alle Drehungen im $\mathbb{R}^2$ um ein gemeinsames Drehzentrums miteinander vertauschen, besitzt $R(\delta)$ folglich bezüglich jeder Orthonormalbasis die gleiche Matrixdarstellung.

Mittels (4) läßt sich nun ein analoger Ausdruck zum Nenner der rechten Seite in (3) berechnen:

$$\begin{aligned} \Big\|R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) - \boldsymbol{e}_\rho(\varphi)\Big\|^2 &= \Big\langle R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) - \boldsymbol{e}_\rho(\varphi),\ R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) - \boldsymbol{e}_\rho(\varphi)\Big\rangle \\ &= \Big\langle(\cos\delta - 1)\,\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi),\ (\cos\delta - 1)\,\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)\Big\rangle \\ &= (\cos\delta - 1)^2 + (\sin\delta)^2 \\ &= 2(1 - \cos\delta) \end{aligned}$$

[2] $\boldsymbol{e}_\rho(\varphi)$ ist der Tangentialvektor an die ρ-Linie ($\varphi = \text{const.}$), während $\boldsymbol{e}_\varphi(\varphi)$ Tangentialvektor an die φ-Linie ($\rho = \text{const.}$) ist.

Durch Wurzelziehen erhält man somit für die Norm

$$\Big\| R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho(\varphi) - \boldsymbol{e}_\rho(\varphi) \Big\| = \sqrt{2(1-\cos\delta)},$$

welche offenbar unabhängig von φ ist.

Kommen wir nun endlich zur Transformation von (3). Gesucht sind zwei Funktionen $r : [0, T_{\max}) \to [0, \infty)$ und $\phi : [0, T_{\max}) \to \mathbb{R}$ auf einem rechtsseitig offenen Zeitintervall $[0, T_{\max})$, so daß sich die Lösung $\boldsymbol{q} : [0, T_{\max}) \to \mathbb{R}^2$ von (3) folgendermaßen darstellen läßt:

$$\boldsymbol{q}(t) = q_1(t)\boldsymbol{e}_1 + q_2(t)\boldsymbol{e}_2 \overset{!}{=} r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) \tag{7}$$

Welchen Gleichungen müssen r und ϕ genügen, wenn $\boldsymbol{q}$ die Gleichung (3) befriedigt? Setzen wir (7) zunächst in die linke Seite der Differentialgleichung (3) ein, so ergibt sich unter Anwedung der Produkt- und Kettenregel sowie unter Beachtung von (5):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big)\Big) &= \dot{r}(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) \;+\; r(t)\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\boldsymbol{e}_\rho\right)\big(\phi(t)\big)\,\dot{\phi}(t) \\
&= \dot{r}(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) \;+\; r(t)\dot{\phi}(t)\,\boldsymbol{e}_\varphi\big(\phi(t)\big).
\end{aligned} \tag{8}$$

Einsetzen des Ansatzes (7) in die rechte Seite von (3) liefert:

$$\begin{aligned}
s\,\frac{R(\delta)r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) - r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big)}{\Big\|R(\delta)r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) - r(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big)\Big\|} &= s\,\frac{R(\delta)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) - \boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big)}{\sqrt{2(1-\cos\delta)}} \\
&= s\,\frac{(\cos\delta - 1)\,\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_\varphi\big(\phi(t)\big)}{\sqrt{2(1-\cos\delta)}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Dabei wurde der skalare Faktor $r(t)$ aus der Norm gezogen und gekürzt, bevor wir den Zähler mittels (6) umgeformt haben. Gleichsetzen von (8) und (9) führt uns auf die in Polarkoordinaten transformierte Gleichung (3)

$$\dot{r}(t)\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) \;+\; r(t)\dot{\phi}(t)\,\boldsymbol{e}_\varphi\big(\phi(t)\big) = s\,\frac{(\cos\delta - 1)\,\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big) + \sin\delta\,\boldsymbol{e}_\varphi\big(\phi(t)\big)}{2(1-\cos\delta)}, \tag{10}$$

welche durch die Anfangsbedingung $r(0) = a$ und $\phi(0) = 0$ ergänzt wird. Auch wenn (10) fast komplizierter aussieht als (3), so ergibt sich doch eine deutliche Vereinfachung, wenn wir die Gleichung jeweils in ihrer radialen bzw. azimutalen Komponente betrachten. Dank der linearen Unabhängigkeit von $\boldsymbol{e}_\rho\big(\phi(t)\big)$ und $\boldsymbol{e}_\varphi\big(\phi(t)\big)$ müssen die jeweiligen Koeffizienten auf der linken und rechten Seite übereinstimmen. Somit gelangen wir zu den Gleichungen[3]:

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\rho\colon \quad \dot{r}(t) &= \frac{s(\cos\delta - 1)}{\sqrt{2(1-\cos\delta)}} = -s\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos\delta)} = -s\sin\tfrac{\delta}{2}, \\
\boldsymbol{e}_\varphi\colon \quad r(t)\dot{\phi}(t) &= \frac{s\sin\delta}{\sqrt{2(1-\cos\delta)}} = \frac{s\sqrt{1-\cos^2\delta}}{\sqrt{2(1-\cos\delta)}} = s\sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\delta)} = s\cos\tfrac{\delta}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Zur Vereinfachung der trigonometrischen Ausdrücke auf der rechten Seiten wurden die Identitäten[4]

$$\sin\tfrac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\delta}{2}} \quad \text{für } \delta \in [0, 2\pi] \qquad \text{und} \qquad \cos\tfrac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\delta}{2}} \quad \text{für } \delta \in [0, \pi]$$

angewendet sowie die dritte Binomische Formel $1 - \cos^2\delta = (1-\cos\delta)(1+\cos\delta)$ in der unteren Zeile. Die Integration von $(11)_1$ unter Beachtung der Anfangsbedingung $r(0) = a$ liefert

$$r(t) = a - s\sin(\tfrac{\delta}{2})\,t.$$

[3] Die Gleichungen erhält man formal besonders bequem, indem man Gleichung (10) mit $\boldsymbol{e}_\rho(\phi(t))$ bzw. mit $\boldsymbol{e}_\varphi(\phi(t))$ durchmultipliziert und die Orthonormiertheit dieser Vektoren ausnutzt.

[4] Man beachte, daß die trigonometrischen Identitäten für den hier interessierenden Fall $\delta = \frac{2\pi}{n}$ mit $n \geq 3$ angewendet werden dürfen.

Damit läßt sich auch $(11)_2$ leicht lösen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\phi(0) = 0$:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{s\cos\frac{\delta}{2}}{r(t)} = \frac{s\cos\frac{\delta}{2}}{a - s\sin(\frac{\delta}{2})\,t} = \frac{\frac{s}{a}\cos\frac{\delta}{2}}{1 - \frac{s}{a}\sin(\frac{\delta}{2})t} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(t) = \frac{\frac{s}{a}\cos(\frac{\delta}{2})}{-\frac{s}{a}\sin(\frac{\delta}{2})}\log\left(1 - \sin(\tfrac{\delta}{2})\frac{st}{a}\right).$$

Mit $\delta = \frac{2\pi}{n}$ ergibt sich somit folgende Lösung:

$$r(t) = a - s\sin(\tfrac{\pi}{n})\,t, \qquad \phi(t) = -\cot(\tfrac{\pi}{n})\,\log\left(1 - \sin(\tfrac{\pi}{n})\frac{st}{a}\right) = -\cot(\tfrac{\pi}{n})\,\log\big(ar(t)\big)$$

Offensichtlich existiert die Lösung nur für

$$t < T_{\max} = \frac{a}{s\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{L}{2s(\sin\frac{\pi}{n})^2}.$$

Man beachte, daß $r(T_{\max}) = 0$ aber $\phi(T_{\max})$ bereits nicht mehr definiert ist, da der Logarithmus bei 0 singulär wird. Für $t > T_{\max}$ wird $r(t)$ negativ und damit sinnlos.
Die Personen treffen sich zum Zeitpunkt $t = T_{\max}$ im Nullpunkt, welcher dem Mittelpunkt des n-Ecks entspricht. Es ist interessant, den Grenzwert $n \to \infty$ zu betrachten. Dabei kann man entweder a oder L konstant halten.

Bemerkung: Die Berechnung der Lösung in kartesischen Koordinaten dürfte deutlich komplizierter sein als in Polarkoordinaten. Hier gelingt die Lösung recht leicht, da

- sich einerseits die Gleichungen für die beiden Koordinaten (teilweise) entkoppeln, denn die Gleichung für r hängt nicht von ϕ ab,
- andererseits die Integration der resultierenden Differentialgleichungen für r und ϕ lediglich das Bestimmen einer Stammfunktion erfordert.

Man kann (3) auch lösen, indem man zunächst das *lineare* Anfangswertproblem

$$\mathbf{q}(0) = a\boldsymbol{e}_1, \qquad \dot{\mathbf{q}}(t) = s\big(R_n\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t)\big) \tag{12}$$

betrachtet. Tatsächlich führen die Lösungen von (3) und (12) auf dieselben Trajektoren (Bildkurven der Lösungen im $\mathbb{R}^2$), die nur zeitlich anders durchlaufen[5] werden. Als lineare Differentialgleichung läßt sich (12) mit Standardtechniken (Exponentialmatrix) auch in kartesischen Koordinaten leicht lösen. Um zu der Lösung von (3) zu gelangen, muß man die Zeit umskalieren. Die Umskalierung ergibt sich im wesentlichen aus der Bogenlänge der Trajektorien.

[5] Im Falle von (12) erreicht die Lösung den Nullpunkt nur asymptotisch für $t \to \infty$.