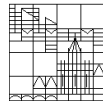


Wegintegrale

Berechnung der Bogenlänge



Martin Rheinländer
FB Mathematik & Statistik
Universität Konstanz

Folien zum 10. Vorlesungstermin (24. Juni 2009)
Vorlesung : Mi 10-12 in P712, Übung: Mi 9-10 in P603 und 13-14 in R511

Foto: Feldweg Nähe Pestkreuze bei Emmingen-Liptingen (Kreis Tuttlingen)
martin.rheinlaender@uni-konstanz.de
<http://www.math.uni-konstanz.de/~rheinlae>

Integration: Erinnerung & Übersicht

Integrale in 1D

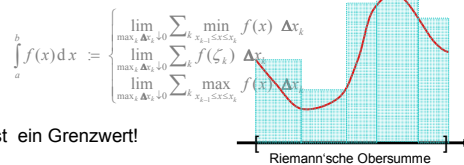
Was wird integriert? → **Funktionen**

$$f: D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Worüber wird integriert? → **Intervalle**

$$[a, b] \subset D(f)$$

Das Integral ist ein Grenzwert!



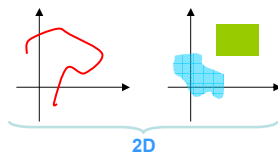
Verallgemeinerung Integrale in 2D & 3D

Warum verallgemeinern?

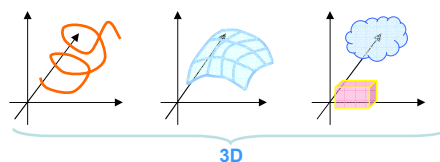
- Natürliche Fragen: Berechnung von Länge, Oberfläche, Volumen geometrischer Objekte.
- Übertragung einer „bewährten“ mathematischen Technik auf kompliziertere Probleme mit mehreren Variablen.

Worüber wird integriert?

ebene Kurven & Flächen



räumliche Kurven & Flächen und Volumina



Was wird integriert?

Das hängt u.a. vom Integrationsbereich ab. Kompliziertere Integrationsbereiche erlauben auch strukturell komplexere Integranden wie Differentialformen und Vektorfelder.

Wegintegral = Kurvenintegral, Linienintegral (Contourintegral)

Natürlich sind auch Vektorfelder, Differentialformen etc. Funktionen im Sinne von Abbildungen, aber komplizierterer Bauart als die gewöhnlichen skalarwertigen Funktionen.

Beschreibung (Darstellung) von Kurven/Wegen

Wie lässt sich eine Kurve Γ analytisch beschreiben?

in 2D

• *explizit* als Graph einer Funktion einer Variablen $x \in \mathbb{R}$: $\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}$

Spezielle & eindeutige Parametrisierung, aber nicht immer möglich!

• *explizit* durch Parametrisierungen $\Gamma = \{\mathbf{p}(t) = (p_x(t), p_y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a, b]\}$

• *implizit* als Lösungsmenge einer Gleichung ((Null-)Niveaulinie einer Funktion zweier Variablen $x, y \in \mathbb{R}$) $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$

$$\mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} p_x(t) \\ p_y(t) \\ p_z(t) \end{pmatrix}$$

in 3D

• *explizit* durch Parametrisierungen $\Gamma = \{\mathbf{p}(t) = (p_x(t), p_y(t), p_z(t)) \in \mathbb{R}^3 : t \in [a, b]\}$

• *implizit* als Lösungsmenge zweier Gleichungen (bzw. Schnitt zweier Flächen) $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0 \text{ und } h(x, y, z) = 0\}$

Bemerkung: Parametrisierungen bringen eine dritte Variable, den Parameter, ins Spiel, den man als *fiktive Zeit* deuten kann. In der Parametrisierung lässt sich daher nicht nur die *geometrische* Information bezüglich Form und Lage einer Kurve kodieren sondern auch *kinematische* (bewegungsmäßige) Information, d.h. mit welcher Geschwindigkeit (Schnelligkeit) die Kurve durchlaufen werden soll.

Notation: Die Ableitung nach dem Parameter wird à la Newton mit einem Punkt über der betreffenden Funktionsvariable markiert.

Begriffsklärung: Kurve(nstück) / Weg

Intuitive Vorstellung bzw. Beschreibung:

Ein **Kurvenstück** ist eine **eindimensionale** (zusammenhängende) Punktmenge in der Ebene, im Raum oder allgemein im $\mathbb{R}^d$.

Definition: Eine Teilmenge Γ im $\mathbb{R}^d$ heißt **C^r -Kurvenstück** (r aus $\mathbb{N}_0$), kurz Kurvenstück, wenn Γ dem Bild einer r -mal stetig differenzierbaren Abbildung $\mathbf{p}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ entspricht.

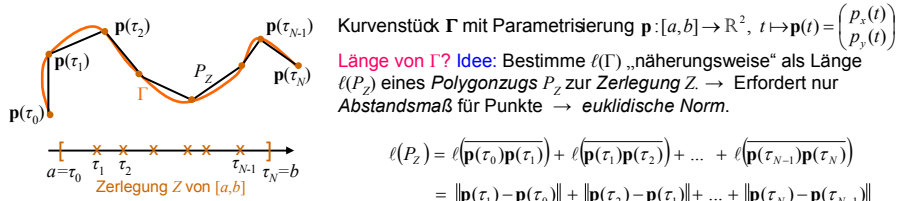
Die Abbildung $\mathbf{p}$ wird als **C^r -Parametrisierung** von Γ bezeichnet.

Reguläre Parametrisierung: Für alle $t \in [a, b]$ $\frac{d}{dt} \mathbf{p}(t) \equiv \dot{\mathbf{p}}(t) \neq 0$

Kurven werden aus Kurvenstücken zusammengesetzt, d.h. die Vereinigung mehrerer Kurvenstücke wird als Kurve bezeichnet.

Beachte: Gemäß der obigen Definition stellt auch ein einzelner Punkt ein C^r -Kurvenstück dar (allerdings kein *reguläres*), nämlich mit einer konstanten Parametrisierung.

Berechnung der Bogenlänge → Prototyp eines Wegintegrals



Falls $\Delta\tau_k := \tau_{k+1} - \tau_k$ hinreichend klein:

$$\Delta\mathbf{p}_k := \mathbf{p}(\tau_{k+1}) - \mathbf{p}(\tau_k) = \mathbf{p}(\tau_k + \Delta\tau_k) - \mathbf{p}(\tau_k) \approx \frac{d\mathbf{p}}{dt}(\tau_k) \Delta\tau_k \equiv \dot{\mathbf{p}}(\tau_k) \Delta\tau_k$$

Erinnerung:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Riemann – Summe der Funktion

$$[a, b] \ni t \mapsto \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| \in \mathbb{R}$$

$$\ell(P_Z) = \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{p}(\tau_{k+1}) - \mathbf{p}(\tau_k)\| \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\dot{\mathbf{p}}(\tau_k) \Delta\tau_k\| = \sum_{k=0}^{N-1} \|\dot{\mathbf{p}}(\tau_k)\| \Delta\tau_k$$

Einerseits: $\ell(P_Z) \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0} \ell(\Gamma)$ wobei $|Z| := \max_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k$

Andererseits: $\ell(P_Z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\dot{\mathbf{p}}(\tau_k)\| \Delta\tau_k \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt$

Je kleiner $|Z|$ desto geringer die Abweichung zwischen $\ell(P_Z)$ und der Riemann-Summe.

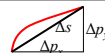
$$\Rightarrow \ell(\Gamma) \equiv \int_{\Gamma} dl \equiv \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{p}_x(t)^2 + \dot{p}_y(t)^2} dt$$

(skalares) Längen- bzw.

Streckenelement:

$$dl \equiv ds = \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt$$

Standardnotation: $\ell(\Gamma) \equiv \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$



Merkte: $\Delta s^2 = \Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 = \left(\frac{dp_x}{dt}\right)^2 \Delta t^2 + \left(\frac{dp_y}{dt}\right)^2 \Delta t^2$
Pythagoras

Hinterfragen

Kritik an der Argumentation auf Seite 3:

Einerseits: $\ell(P_Z) \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0} \ell(\Gamma)$ wobei $|Z| := \max_{k=0}^{N-1} \Delta\tau_k$

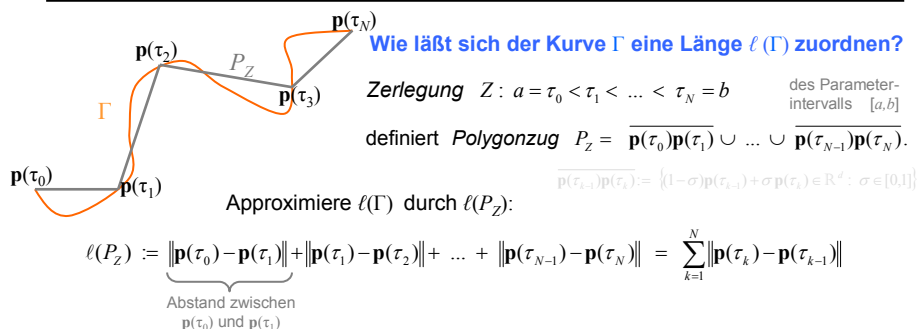
• Hinter dieser intuitiv anschaulichen Feststellung verbirgt sich eine Behauptung. Diese besteht jedoch nicht in der Aussage, daß $\ell(P_Z)$ gegen $\ell(\Gamma)$ konvergiert sondern vielmehr in der Tatsache, daß $\ell(P_Z)$ überhaupt konvergiert. In diesem Zusammenhang muß zunächst präzisiert werden, wie die Konvergenz für $|Z| \rightarrow 0$ überhaupt zu verstehen ist. *A priori* bleibt es völlig im Vagen, was die Länge einer gekrümmten Kurve sein soll. Klar ist allein die Abstandsmessung zwischen zwei Punkten mittels einer Norm wie der euklidischen (Standardnorm). Weil aber $\ell(P_Z)$ bei feiner werdender Intervallzerlegung Z einem Grenzwert zustrebt, kann man diesen heranziehen um $\ell(\Gamma)$ sinnvoll zu definieren.

Andererseits: $\ell(P_Z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\dot{\mathbf{p}}(\tau_k)\| \Delta\tau_k \xrightarrow{|Z| \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt$

• Zwar ist die Näherung $\mathbf{p}(t_k + \Delta\tau_k) - \mathbf{p}(t_k) \approx \dot{\mathbf{p}}(t_k) \Delta\tau_k$ umso besser, je kleiner $|Z|$ und damit $\Delta\tau_k$ ist, allerdings ist zu beachten, daß bei kleinem $|Z|$ die Summe mehr Summanden umfaßt und der Fehler daher öfter wiederholt wird. Es ergeben sich somit zwei widerstreitende (antagonistische) Effekte. *Es bleibt deshalb zunächst offen*, welcher Effekt sich gegebenenfalls durchsetzt.

Insofern ist hier eine etwas genauere Analyse von Nöten. Da sich der Abbruchfehler (Taylor!) bei glattem $\mathbf{p}$ und einer halbwegs vernünftigen Zerlegungsfolge (z.B. äquidistant) wie $O(\Delta\tau_k^2) = O(N^{-2})$ verhält, während die Anzahl der Terme in der Summe nur linear mit N wächst, ist zu erwarten, daß $\ell(P_Z)$ und die Riemann-Summe gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Messung & Definition der Bogenlänge



Beobachtung: Z_2 Verfeinerung von Z_1 , d.h. $Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow \ell(P_{Z_1}) \leq \ell(P_{Z_2})$ wegen Dreiecksungleichung!

Definition: Es existiere $M \geq 0$ mit $\ell(P_Z) < M$ für alle Zerlegungen Z . Dann heißt Γ **rektifizierbar** und man setzt $\ell(\Gamma) := \sup_Z \ell(P_Z)$.

Die Länge einer Kurve ist nun definiert, wie aber kann man sie möglichst einfach praktisch berechnen?

$\ell(P_Z)$ ist die Summe der Abstände „benachbarter“ Eckpunkte (Vertizes) des Sehnepolygonzugs P_Z .
 $\|\cdot\|$ bezeichnet die euklidische Norm: $\|p(\tau_k) - p(\tau_{k-1})\| = \sqrt{\sum_{i=1}^d (p_i(\tau_k) - p_i(\tau_{k-1}))^2}$

Anhang: Satz über die Bogenlänge

Satz: Γ sei Kurvenstück im $\mathbb{R}^d$ mit C^1 -Parametrisierung $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, d.h. p ist **stetig differenzierbare** Abbildung im **kompakten** Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{R}^d$.

$$\Rightarrow \Gamma \text{ ist rektifizierbar mit } \ell(\Gamma) = \int_{\Gamma} dl = \int_a^b \| \dot{p}(t) \| dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(t)} dt.$$

Beweis: Zeige zunächst: $\ell(\Gamma) < \infty$

1) Es sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $Z: a = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = b$.

Laut **Mittelwertsatz** existiert für jede Komponentenfunktion p_i mit $i \in \{1, \dots, d\}$ und jedes Teilintervall $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ mit $k \in \{1, \dots, N\}$ eine Zwischenstelle $\zeta_{ik} \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$, so daß

$$\ell(P_Z) = \sum_{k=1}^N \|p(\tau_k) - p(\tau_{k-1})\| = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d (p_i(\tau_k) - p_i(\tau_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik}) (\tau_k - \tau_{k-1})^2}.$$

$$\text{Also: } \ell(P_Z) = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k \quad \text{mit } \Delta \tau_k := \tau_k - \tau_{k-1}.$$

2) Nach Voraussetzung ist jedes $\dot{p}_i$ stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, d\}, \exists M_i \in [0, \infty), \forall t \in [a, b]: |\dot{p}_i(t)| \leq M_i \quad (\text{Beschränktheit der } \dot{p}_i \text{'s})$$

$\Rightarrow$ Abschätzung von $\ell(P_Z)$ mit $M := \max_i M_i < \infty$

$$\ell(P_Z) = \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k \leq \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d M_i^2} \Delta \tau_k = M \sqrt{d} \sum_{k=1}^N \Delta \tau_k = M \sqrt{d} (b - a) < \infty$$

Beachte: Vielfach wird die Bogenlänge von C^1 -Kurvenstücken direkt über das Integral definiert.

Der Beweis gliedert sich in zwei Teile. Zunächst wird die Rektifizierbarkeit nachgewiesen. Insgesamt ist der Beweis in 9 Argumentationspunkte gegliedert. **Achtung:** Der Mittelwertsatz läßt sich leider nicht direkt auf p anwenden, was den Beweis deutlich abkürzen würde.

Anhang: Satz über die Bogenlänge (Forts. Beweis)

3) Damit gilt unabhängig von Zerlegung $Z: \ell(P_Z) \leq M\sqrt{d}(b-a) \Rightarrow \ell(\Gamma) = \sup_Z \ell(P_Z) \leq M\sqrt{d}(b-a) < \infty$

Zeige nun für beliebiges $\eta > 0$: $\left| \ell(\Gamma) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| \leq \eta$.

$$\Rightarrow \left| \ell(\Gamma) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| = 0 \Leftrightarrow \text{Behauptung } \ell(\Gamma) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt < \infty.$$

$$4) \text{ Dreiecksungleichung: } \left| \ell(\Gamma) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| \leq \underbrace{\left| \ell(\Gamma) - \ell(P_Z) \right|}_{=:A} + \underbrace{\left| \ell(P_Z) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right|}_{=:B}$$

5) Einschließen einer Riemann-Summe in B mit den Zwischenstellen $\xi_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ für $k \in \{1, \dots, N\}$ & Anwenden der Dreiecksungleichung auf B :

$$B = \left| \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| \leq \underbrace{\left| \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k - \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k \right|}_{=:B_1} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right|}_{=:B_2}$$

6) Gemäß Voraussetzung ist Ableitung $\dot{\mathbf{p}}$ stetig auf Kompaktum $[a, b]$.

$\Rightarrow \dot{\mathbf{p}}$ gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

$\Rightarrow$ Komponentenfunktionen $\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_d$ bzw. deren Quadrate $\dot{p}_1^2, \dots, \dot{p}_d^2$ gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, d.h.:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall s, t \in [a, b], \forall i \in \{1, \dots, d\}: |s - t| < \delta \Rightarrow |\dot{p}_i^2(s) - \dot{p}_i^2(t)| < \varepsilon$.

Anhang: Satz über die Bogenlänge (Forts. Beweis)

7) Abschätzen von B_1 unter Annahme: $|Z| \equiv \max_k \Delta \tau_k < \delta$

Wegen $\zeta_{ik}, \xi_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ folgt mit Punkt 6): $|\dot{p}_i^2(\zeta_{ik}) - \dot{p}_i^2(\xi_k)| < \varepsilon$ da $|\zeta_{ik} - \xi_k| \leq \Delta \tau_k < \delta$.

$$B_1 = \left| \sum_{k=1}^N \left(\sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} - \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\xi_k)} \right) \Delta \tau_k \right| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d |\dot{p}_i^2(\zeta_{ik}) - \dot{p}_i^2(\xi_k)|} \Delta \tau_k \leq \sum_{k=1}^N \sqrt{d\varepsilon} \Delta \tau_k = \sqrt{d\varepsilon}(b-a)$$

8) Sei nun $\eta > 0$ vorgegeben.

Betrachte folgende Ungleichung, welches aus Punkt 4) & 5) ergibt und schätze A, B_1 und B_2 ab:

$$\left| \ell(\Gamma) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| \leq \underbrace{\left| \ell(\Gamma) - \ell(P_Z) \right|}_{=:A} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k - \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k \right|}_{=:B_1} + \underbrace{\left| \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right|}_{=:B_2}$$

A : Definition & Endlichkeit von $\ell(\Gamma) \Rightarrow \exists$ Zerlegung Z_0 von $[a, b]$ mit $|Z_0| := |Z_0|$: $|\ell(\Gamma) - \ell(P_{Z_0})| < \frac{\eta}{3}$.

B_1 : Wähle in Punkt 6) $\varepsilon = \frac{\eta^2}{9d(b-a)^2}$ und setze $\delta := \delta$ (zugehöriges δ)

$$\text{Punkt 7)} \Rightarrow \forall \text{ Zerlegungen } Z \text{ mit } |Z| < \delta: \left| \sum_{k=1}^N \sqrt{\sum_{i=1}^d \dot{p}_i^2(\zeta_{ik})} \Delta \tau_k - \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k \right| \leq \sqrt{d\varepsilon}(b-a) = \frac{\eta}{3}$$

(*) Dabei wurde die allgemeine Ungleichung benutzt: $|\sqrt{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} - \sqrt{\beta_1 + \dots + \beta_n}| \leq \sqrt{|\alpha_1 - \beta_1| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|}$

Punkt 6) und 7) sind als Vorbemerkung zu Punkt 8) zu verstehen.

Anhang: Satz über die Bogenlänge (Forts. Beweis)

B_2 : Als stetige Funktion ist $\|\dot{\mathbf{p}}\|$ über dem Kompaktum $[a, b]$ integrierbar.

Definition des Integrals mittels *Riemann'sche Summen*:

$$\Rightarrow \exists \text{ Zerlegung } Z_2 \text{ mit } \mathcal{Q}_2 := |Z_2|: \quad \left| \sum_{k=1}^N \|\dot{\mathbf{p}}(\xi_k)\| \Delta \tau_k - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| < \frac{\eta}{3}$$

9) Wähle nun Zerlegung Z als **gemeinsame Verfeinerung** von Z_0 und Z_2 mit $\mathcal{Q} := |Z| < \mathcal{Q}_1$.

$\Rightarrow$ Die Abschätzungen der Terme A, B_1 und B_2 in Punkt 8) bleiben bzgl. dieser Zerlegung Z bestehen.

Somit folgt:

$$\left| \ell(\Gamma) - \int_a^b \|\dot{\mathbf{p}}(t)\| dt \right| \leq A + B_1 + B_2 \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta$$

Die folgende allgemeine Ungleichung wurde in Punkt 7) benutzt:

Lemma: Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und $\beta_1, \dots, \beta_n$ reelle Zahlen mit $\alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq 0$ und $\beta_1 + \dots + \beta_n \geq 0$. Dann gilt:

$$\left| \sqrt{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} - \sqrt{\beta_1 + \dots + \beta_n} \right| \leq \sqrt{|\alpha_1 - \beta_1| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|}$$

Beweis: Betrachte den Fall $n=1$: $a = \alpha_1, b = \beta_1$. O.B.d.A. gelte $a \geq b > 0$. Falls $b=0$, ist nichts zu beweisen.

Behauptung $\Leftrightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b} \xrightarrow{\text{quadrieren}} a - 2\sqrt{ab} + b \leq a - b \Leftrightarrow 2b \leq 2\sqrt{ab} \xrightarrow{:2\sqrt{b}}} \sqrt{b} \leq \sqrt{a}$
 $\Leftrightarrow b \leq a$ wahr nach Voraussetzung.

Führe Fall $n > 1$ auf Fall $n=1$ zurück. O.B.d.A. darf angenommen werden: $a := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \geq \beta_1 + \dots + \beta_n =: b$.

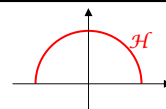
Es folgt mit der Dreiecksungleichung aus Fall $n=1$:

$$\sqrt{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} - \sqrt{\beta_1 + \dots + \beta_n} \leq \sqrt{(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) - (\beta_1 + \dots + \beta_n)} = \sqrt{(\alpha_1 - \beta_1) + \dots + (\alpha_n - \beta_n)} \leq \sqrt{|\alpha_1 - \beta_1| + \dots + |\alpha_n - \beta_n|}$$

Beispiel: Berechnung der Kurvenlänge

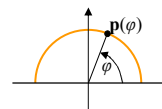
Gesucht: Länge des oberen Einheits-Halbkreises $\mathcal{H}$: $\ell(\mathcal{H}) = \pi$

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x \geq 0\}$$



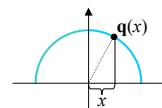
1. Parametrisierung: $\mathbf{p}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$\ell(\mathcal{H}) = \int_0^\pi \sqrt{\dot{p}_1^2(\varphi) + \dot{p}_2^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2} d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{1} d\varphi = \pi$$

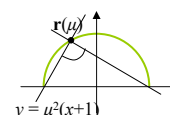


2. Parametrisierung: $\mathbf{q}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1-x^2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{H}) &= \int_{-1}^1 \sqrt{\dot{q}_1^2(x) + \dot{q}_2^2(x)} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1^2 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \arccos(1) - \arccos(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \end{aligned}$$



3. Parametrisierung: $\mathbf{r}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2, \mu \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1-\mu}{1+\mu} \\ \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu} \end{pmatrix}$



Daß die Parametrisierungen tatsächlich Punkte auf dem Einheitskreis liefern, läßt sich überprüfen, indem man die beiden Komponenten jeweils quadriert und anschließend addiert. Dann muß sich 1 ergeben.

Beispiel: Berechnung der Kurvenlänge (Forts.)

Rechnung zur 3. Parametrisierung: $r_1(\mu) = \frac{1-\mu}{1+\mu}$, $r_2(\mu) = \frac{2\sqrt{\mu}}{1+\mu}$

Berechnung der Wurzel (Ableiten der Komponenten r_1, r_2 mittels Quotientenregel).

$$\begin{aligned}\sqrt{\dot{r}_1^2(\mu) + \dot{r}_2^2(\mu)} &= \sqrt{\left(\frac{-(1+\mu) - (1-\mu)}{(1+\mu)^2}\right)^2 + \left(\frac{\mu^{-\frac{1}{2}}(1+\mu) - 2\mu^{\frac{1}{2}}}{(1+\mu)^2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{-2}{(1+\mu)^2}\right)^2 + \left(\frac{1-\mu}{\sqrt{\mu}(1+\mu)^2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{(1+\mu)^2} \sqrt{4\mu + (1-\mu)^2} = \frac{1}{(1+\mu)^2} \sqrt{(1+\mu)^2} = \frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\mu)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell(\mathcal{H}) &= \int_0^\infty \sqrt{\dot{r}_1^2(\mu) + \dot{r}_2^2(\mu)} \, d\mu = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\mu}(1+\mu)} \, d\mu \quad \text{Substitution: } \begin{cases} \mu = v^2 \\ d\mu = 2v \, dv \end{cases} \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{v(1+v^2)} 2v \, dv = 2 \int_0^\infty \frac{1}{1+v^2} \, dv = 2 (\arctan \infty - \arctan 0) = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi\end{aligned}$$

Bemerkung: Die Parametrisierung $v \mapsto \left(\frac{1-v^2}{1+v^2}, \frac{2v}{1+v^2} \right)$ weist zwei Besonderheiten auf:

- **Rationale** Parametrisierung: Punkte auf Kreis können allein mit den vier Grundrechenarten berechnet werden.
- Parametrisierungsintervall ist **nicht beschränkt** bzw. kompakt.

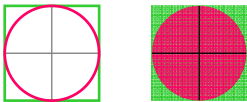
Die Parametrisierung ergibt sich dadurch, daß man die beiden zueinander senkrecht stehenden Geraden mit den Steigungen v und $-1/v$ zum Schnitt bringt, wobei die Gerade mit der Steigung v durch den Punkt $(-1,0)$ die andere durch den Punkt $(1,0)$ verläuft. Man erhält so ein **rechtwinkliges** Dreieck über dem Durchmesser des Einheitskreises (x -Achse), dessen Spitze – Schnittpunkt der beiden Geraden – auf der Einheitskreislinie liegt (**Satz des Thales**).

Exkurs: Zur Kreiszahl π

Denkanstöße:

• Die Formeln zur Berechnung des Kreisumfangs U und der Kreisfläche F sind aus der Schule bekannt. Hier wird π als Verhältniszahl (Proportionalitätsfaktor) eingeführt. Wie wird π in der Höheren Mathematik (Calculus/Infinitesimalrechnung) definiert?

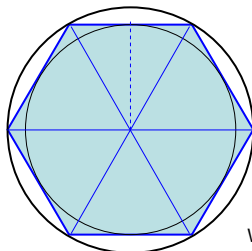
• A priori sollte es etwas überraschend sein, daß π in beiden Formeln erscheint. Wie ist das zu erklären?



$$U = 2\pi r = \pi d \quad F = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$$

Beachte: $\frac{d}{dr} F(r) = U(r)$

Analoges gilt für die Kugel.



Betrachte Folge der regelmäßigen n -Ecke zu einem gemeinsamen festen Umkreis (z.B. Einheitskreis) vom Radius r . U_n sei der Umfang, F_n die Fläche und ρ_n der Inkreisradius zum jeweiligen n -Eck. Angenommen

$$U = 2\pi r \quad \text{und} \quad F = \pi r^2 \quad \text{mit} \quad \pi \neq \tilde{\pi}.$$

$$\text{Nun gilt: } \begin{cases} \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} r \\ U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} U = 2\pi r \\ F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F = \pi r^2 \end{cases}$$

$$\text{Wegen (siehe Skizze)} \quad F_n = \frac{1}{2} U_n \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F = \frac{1}{2} U r \Rightarrow \tilde{\pi} r^2 = \pi r^2$$

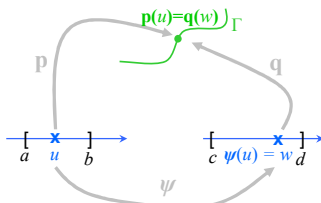
$$\text{folgt: } \tilde{\pi} = \pi.$$

• Man definiert zum Beispiel $\pi/2$ als kleinste positive Nullstelle des Kosinus. Dazu ist zunächst der Kosinus zu definieren (z.B. als Reihe); sodann ist zu zeigen, daß der Kosinus tatsächlich eine positive Nullstelle erreicht

• Der Inkreisradius entspricht gerade der Höhe der i.a. gleichschenkligen Dreiecke, aus welchen das regelmäßige n -Eck zusammengesetzt ist.

Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung

Beobachtung: Bogenlänge des Halbkreises ergibt sich unabhängig von der gewählten Parametrisierung. **Warum?**



Betrachte zwei Parametrisierungen $\begin{cases} p : [a, b] \rightarrow \Gamma \\ q : [c, d] \rightarrow \Gamma \end{cases}$

Warum $\int_a^b \|\dot{p}(u)\| du = \int_c^d \|\dot{q}(w)\| dw$?

Jedem Punkt von $[a, b]$ bzw. $[c, d]$ wird durch p bzw. q genau ein Punkt auf Γ zugeordnet $\rightarrow$ daraus ergibt sich auch eine eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten in den beiden Intervallen:

$$\psi : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \psi(u) = q^{-1}(p(u)) \Leftrightarrow q(\psi(u)) = p(u)$$

Anwenden der **Substitutionsregel**

Es wird vorausgesetzt, daß p und q die Kurve Γ *gleichsinnig* parametrisieren. Dann ist ψ *streng monoton wachsend* mit positivwertiger Ableitung, welche problemlos in die Norm gezogen werden kann. Bei *gegensinniger Orientierung* ist die Ableitung von ψ zwar negativwertig, dafür drehen sich aber auch die Integrationsgrenzen um.

$$\ell(\Gamma) = \int_c^d \|\dot{q}(w)\| dw = \int_{a=\psi^{-1}(c)}^{b=\psi^{-1}(d)} \|\dot{q}(\psi(u))\| \psi'(u) du$$

$$= \int_a^b \|\dot{q}(\psi(u)) \psi'(u)\| du = \int_a^b \left\| \frac{d}{du} [q(\psi(u))] \right\| du$$

Anwenden der **Kettenregel**
(rückwärts)

$$= \int_a^b \left\| \frac{d}{du} [p(u)] \right\| du = \int_a^b \|\dot{p}(u)\| du$$

Umbenennen

Fazit: Bogenlänge hängt nicht von der Parametrisierung ab. $\rightarrow$ Bogenlänge ist eine Eigenschaft der Kurve als geometrisches Objekt (Punktemenge im $\mathbb{R}^2$).

Im allgemeinen mag es sehr schwer sein, ψ konkret auszurechnen, da man dazu q invertieren muß. Entscheidend für die hiesige Argumentation ist aber lediglich, daß ψ existiert und differenzierbar ist. Dies ist der Fall, wenn p und q injektive C^1 -Parametrisierungen sind mit nicht verschwindender Ableitung (reguläre Parametrisierung). In analoger Weise ist auch das allgemeine Wegintegral unabhängig von der Parametrisierung.