Mathematische Modellierung

Einstieg

Vorlesung : Mi 10 – 12, P 712

Übung: Mi 8 – 10, P603 (vierzehntägl.)

Martin Rheinländer
FB Mathematik & Statistik
Universität Konstanz

Skript zum 1. Vorlesungstermin (22. April 2009)

martin.rheinlaender@uni-konstanz.de
Büro: G414 a, Tel. 88 3648

Was ist ein Modell?

Duden Fremdwörterbuch: 9 Definitionen in verschiedenen Kontexten

Typisches Bastler-Modell (Fregatte der Marine 1:100)

- Entwurf oder Nachbildung in kleinerem Maßstab z.B. eines Bauwerks, technischen Geräts oder eines Kunstwerks (Plastik).
- Vereinfachte Darstellung (oder Funktion) eines Gegenstands oder des Ablaufs eines Sachverhalts, die das Verständnis, eine Untersuchung oder Erforschung erleichtert bzw. ermöglicht.

Natur- und **Gesellschaftswissenschaften** verwenden **mathematische Modelle**.

Mathematisches Modell = Mittels mathematisch formulierter Gesetzmäßigkeiten beschriebene, virtuelle Kunstwelt, welche zunächst dazu dient, einen Auschnitt der realen Welt vereinfacht aber präzise darzustellen (und ggf. zu berechnen, vorherzusagen oder zu optimieren).

Bildquelle: Internet.

Frage: Ist eine Abbildung auch eine Art von Modell? Worin besteht der Unterschied?

Wie modelliert man?

0.Schritt: **Allgemeines Verstehen** der Ausgangsfragestellung bzw. des zu modellierenden Sachverhalts. Dabei ergeben sich oftmals mehr Fragen als Klarheit. (*Sondieren*)

1.Schritt: **Trennen** der **wesentlichen** von den **unwesentlichen** oder störenden Umständen. (*Vereinfachen, „Occam's razor"*)

2.Schritt: **Übersetzen** des vereinfachten (reduzierten) Sachverhalts: **Alltagssprache** (spez. Fachsprache) → **Beschreibung mittels mathematischer Objekte** Benennen aller **relevanten Größen** inklusive ihrer **Wertebereiche** sowie der untereinander bestehenden **Abhängigkeiten**. (*Präzisieren*)

3.Schritt: **Ausgangsfragestellung** als **mathematisches Problem** formulieren.(*Abstrahieren*)

4.Schritt: **Untersuchen der mathematischen Problems** typischerweise auf Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sowie ihr qualitatives Verhalten. Sofern erforderlich: quantitatives **Berechnen der Lösung** → meist sind dazu **numerische Methoden** nötig. (*Analysieren & Berechnen*)

5.Schritt: **Interpretieren** der Analyseergebnisse bzw. Lösung. **Bewerten** der Konsequenzen für die Ausgangsfragestellung. **Vergleich** mit Alternativmodellen oder experimentellen Daten. Eventuelle **Modellverfeinerung:** erneuter Beginn bei Schritt 1. (*Validieren*)

Die eigentlichen Modellierungsschritte sind blau gefärbt. Der rot gefärbte Schritt 4 verbirgt dagegen die Mathematik im engeren Sinne. Bildquelle: Internet.

Zur Komplexität von Modellen

Art der Fragestellung & gewünschte Detailgenauigkeit bestimmen
→ **Modellkomplexität**

Beispiel:

Massenpunkt: Wie bewegt sich die Erde um die Sonne? Wie lange dauert ein Jahr? — ODEs

Starrer Körper: Wie rotiert die Erde um ihre eigene Achse? Wie lange dauert ein Tag? Wann geht die Sonne auf? Warum verschiebt sich der Frühlingsbeginn allmählich? — ODEs

Elastischer (deformierbarer) Körper: Welche Form hat die Erde? Warum ist sie fast eine Kugel aber keine exakte Kugel (sondern ein symmetrisches Ellipsoid bzw. "Geoid")? Wie können die Gezeiten, Ebbe und Flut, berechnet werden? — PDEs

Plattentektonik: Warum gibt es Gebirge? Wie gelangen Meeresfossilien an Land? Wie könnte man Erdbeben vorhersagen? — PDEs etc.

Bildquelle: Internet.

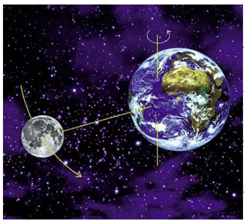
Natürlich hängen Art der Fragestellung und gewünschte Detailgenauigkeit miteinander zusammen, denn eine vollständige Fragestellung muß auch über die gewünschte Detailgenauigkeit Auskunft geben.
ODE = ordinary differential equation = gewöhnliche Differentialgleichung. PDE = partial differential equation = partielle Differentialgleichung.

Zur Komplexität von Modellen (Forts.)

Art der Fragestellung & **gewünschte Detailgenauigkeit** bestimmen
→ **Modellkomplexität**

Ist das Bild realistisch? Von wo könnte es stammen?

Beispiel: **Wann geht der Mond auf; welche Sichelform hat er?**



Mögliche **Hierarchie** von Modellen, welche sich aus der Berücksichtigung von zunehmend mehr Effekten ergibt.

1. Model: Mond umrundet Erde auf Kreisbahn, welche in der Ekliptik (Ebene der Erdumlaufbahn) liegt.

2. Model: Erde-Mond System umrundet Sonne auf Kreisbahn. Schwerpunkt des Systems wird in Erdmittelpunkt gelegt.

3. Model: Mond und Erde kreisen um gemeinsamen Schwerpunkt.

4. Model: Ebene der Mondumlaufbahn liegt nicht in der Ekliptik.

kinematische Modelle → Stereometrie (da Bewegung vorgeschrieben)

5. Model: Elliptische Umlaufbahnen. "Mond spürt Erde", "Erde spürt Sonne".

6. Model: Fast vollständiges Drei-Körper Problem (Mond und Erde "spüren" jeweils Sonne und wechselwirken gegenseitig. Sonne "spürt" jedoch weder Erde noch Mond).

dynamische Modelle → Stereometrie + ODEs (da Bewegung berechnet wird)

Bildquelle: Internet.

Es wird zunächst vorausgesetzt, daß sich die Erde gleichförmig um ihre eigene Achse dreht. Auch hier können jedoch „Unregelmäßigkeiten" berücksichtigt werden, die zu einer weiteren Verkomplizierung des Modells beitragen. **Aufgabe** → Modelle durch kleine Skizzen illustrieren!
Anderes Beispiel: Schiff, welches in einer Strömung fährt. Die Aufgabe kann bereits mittels elementarer Vektorrechnung gelöst werden; man kann aber auch die Navier-Stokes Gleichung (komplizierte strömungsmech. PDE)bemühen und die Umströmung des Schiffes etc. berechnen.

Was zu beachten ist!

•**Interdisziplinarität:** Bereitschaft sich mit dem Fach auseinanderzusetzen, aus dem das Ausgangs-problem stammt. Insbesondere in Schritt 4 kann ein (intuitives) Verständnis des Ausgangsproblems wertvolle Orientierung bei der Wahl geeigneter mathematischer Ansätze liefern.

•Die skizzierten Schritte sind **nicht immer scharf zu trennen** sondern gehen oft fließend ineinander über bzw. können von Fall zu Fall ganz **unterschiedlich gewichtet** sein.

•**Bewertung von Modellen:** Anders als streng logisches Argumentieren ist das Aufstellen eines Modells durchaus von einer gewissen Willkür begleitet. Modelle lassen sich nicht eindeutig und zwingend ableiten. Oftmals gibt es mehrere, gleichberechtigte Modelle. Somit sind sie weniger in die Kategorien *richtig* und *falsch* einzuordnen, als durch Vokabeln wie *realistisch(er)* oder *unrealistisch(er)* zu bewerten. Ein Modell muß sich daran messen lassen, wie weit es dazu beiträgt, die Ausgangsfrage sinnvoll zu beantworten. Im strengen Sinne ist die Realität meist viel zu komplex, als daß sie durch ein Modell vollständig korrekt beschrieben werden könnte.

•**Verstehen↔Übersetzen:** Modellieren heißt Sachverhalte aus einer teils sehr unübersichtlichen Realität in die weitaus überschaubarere und beherrschbarere Kunstwelt der Mathematik zu übersetzen. Dabei verlangt die präzise Ausdrucksweise der Mathematik ein genaues Verständnis des zu übersetzenden Sachverhalts, bzw. umgekehrt ein genaues Verständnis ergibt sich erst durch eine präzise mathematische Beschreibung. Auch ein Übersetzer gelangt nur zu einer guten Übersetzung, wenn er die Bedeutung des zu übersetzenden Textes verstanden hat. Erst das eigene Verständnis erlaubt es ihm, den Sinn korrekt von einer Sprache in die andere zu übertragen und sich von einer wortwörtlichen Übersetzung zu lösen, die oft sehr holprig klingt.

Was zu beachten ist! (Forts.)

•**Modellieren als iterativer Prozeß:** Das richtige Modell zu finden kann mitunter sehr kniffelig sein. So sind oftmals mehrere Ansätze notwendig, die mehr oder weniger bis zum Ende durchgespielt werden müssen, ehe sich ein wirklich brauchbares Modell ergibt. Die Interaktion zwischen der entsprechen Fachwissenschaft, mathematischer Analyse und Numerik kann dabei von entscheidender Bedeutung sein.

Das genau passende Modell, welches weder zu komplex noch zu simpel ist, läßt sich nur finden, wenn der Zweck des Modells vorher klar festgelegt ist. Manchmal ist dieser ebenfalls schwammig beschrieben und muß zusammen mit dem Modell konkretisiert werden. Dabei ist immer wieder die Frage zu stellen, was zu berücksichtigen ist und was (getrost) ignoriert werden kann. **Asymptotische Untersuchungen** bieten (neben experimentellen/empirischen Erfahrungen) eine theoretische Möglichkeit, derartige Fragen zu beantworten. Im Zweifel sollte generell der Grundsatz gelten: **Je einfacher desto besser.**

Mathematische Modelle, wie sie z.B. in den Forschungsabteilungen der Industrie eingesetzt werden, können sehr umfangreich sein, so daß ganze Forscherteams oft jahrelang an der Erarbeitung, Implementierung und Austestung mitwirken, wobei die jedem Modellbastler bekannte „Frickelarbeit" nicht vermeidbar ist. In Anbetracht dessen können in der Vorlesung nur beispielhafte Modelle mit „Spielzeug-Charakter" behandelt werden. Dennoch sind die dahinterstehenden Konzepte grundlegend. Mal schauen, ob Sie beim mathematischen Modellieren ebenso viel Begeisterung entwickeln wie die Modellbastler bei ihrem Hobby. Natürlich sollen auch in der Vorlesung die diskutierten Modelle ein wenig „ausgetestet" werden, denn es ist auf die Dauer doch etwas langweilig, Modelle nach dem Zusammenbau direkt der „Vitrine" zu überlassen.

Modellierung in der Primarstufe

Aufgabe: Anton und Berta haben zusammen 20€. Berta hat 4€ mehr als Anton. Wieviel Geld hat Anton?

Schritt 0+1 entfallen !

Schritt 2+3: (Übersetzen)

Antons Geldbetrag: $x \in \mathbb{R}$

Bertas Geldbetrag: $y \in \mathbb{R}$

Mathematische Aufgabenstellung: Finde $x, y \in \mathbb{R}$ so daß:

$$x + y = 20 \quad \text{und} \quad x + 4 = y .$$

Schritt 3: (Lösen des linearen Gleichungssystems in Matrixnotation)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: (Interpretieren der Lösung) Anton hat 8€.

Bildquelle: Internet.

Modellierung in der Primarstufe (Forts.)

Aufgabe: Anton und Berta haben zusammen 20 Cent. Berta hat **3Cent** mehr als Anton. Wieviel Geld hat Anton?

Vorgehensweise wie eben:

Mathematische Aufgabenstellung: Finde $x,y \in \mathbb{R}$ so daß:

$$x + y = 20 \quad \text{und} \quad x + 3 = y\,.$$

Lösung: $x = 8½, \;\; y = 11\ ½.$

Problem bei Schritt 4: Lösung läßt sich nicht interpretieren, denn es gibt keine „halben" Centstücke. Die kleinste Geldeinheit ist 1 Cent. Jeder Geldbetrag muß ein ganzzahliges Vielfaches davon sein!

$\Rightarrow\ x,y \in \mathbb{N}$ (**Änderung des Wertebereichs**)

→ Gleichungssystem ist in $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ nicht in $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ zu lösen!

Da $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, darf das Gleichungssystem zunächst in $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ gelöst werden, denn jede Lösung in $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$ ist auch eine Lösung in $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$. Die Lösung in $\mathbb{R}$x$\mathbb{R}$ ist jedoch eindeutig bestimmt (reguläre Systemmatrix!) liegt aber nicht in $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$.

⇒ **Gleichungssystem besitzt keine Lösung in** $\mathbb{N}$x$\mathbb{N}$.
→ Dies legt den Schluß nahe, daß das Ausgangsproblem unrealistisch ist und ebenfalls keine Lösung zuläßt.

Bildquelle: Internet.

Zur Bedeutung von Mathematik und Modellierung

Achtung: Modellierung ≠ Modelltheorie (Teilgebiet der mathematischen Logik)

Mathematik beginnt mit (intuitiver) Modellierung:

sowohl **menschheitsgeschichtlich** wie **unterrichtsmäßig** an den Schulen.

Erst durch zahlreiche klassische Anwendungsaufgaben, aus denen im Laufe der Zeit etliche mathematische Grundprobleme abstrahiert wurden, so daß sie heute kaum noch ihre ursprüngliche Herkunft verraten, ist die Mathematik in die Breite gewachsen und hat sich in viele Teildisziplinen aufgefächert. Nur langsam konnte sich die Mathematik als Wissenschaft verselbständigen, vollends ist dies sogar erst um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert geschehen. Die Eigenständigkeit der Mathematik gegenüber anderen Wissenschaften ist insofern sinnvoll, als daß es durch die immer komplexer werdenden Aufgaben notwendig wurde, mathematische Strukturen systematisch zu untersuchen und auf eine solide Grundlage zu stellen.

Gleichzeitig üben mathematische Objekte aber auch eine ganz eigene Faszination aus, der man aus purer Neugier nachgeht. Nichtsdestotrotz erhält die Entwicklung der Mathematik ihre wichtigsten Anstöße durch Probleme, die von außen an sie herangetragen wurden bzw. werden. Umgekehrt verdankt die Mathematik ihre herausragende gesellschaftliche und kulturelle Bedeutung der Fähigkeit, in andere Wissensgebiete ordnend und aufklärend hineinzuwirken, wobei das Modellieren stets als Bindeglied oder Scharnier wirkt.

Zur Bedeutung von Mathematik und Modellierung (Forts.)

Zwei Punkte sind zu nennen, die die Mathematik besonders auszeichnen:

- ihr strenges systematisches Gerüst, welches (fast nur) auf logischen Schlüssen basiert,
- ihre Universalität, die sich aus dem hohen Abstraktionsgrad ergibt.

Ihre Besonderheit verdankt die Mathematik jedoch dem Umstand, daß sie sich im Gegensatz zu anderen Wissenschaften mit idealisierten Objekten befaßt. Es wundert daher nicht, daß die Mathematik den Status der idealen (vorbidlhaften) Wissenschaft erlangt hat. Viele andere Wissenschaften streben diesem Ideal in gewisser Weise nach, indem sie sich von qualitativ beschreibenden zu quantitativ berechnenden Vorgehensweisen wenden (Mathematisierung). Eine sinnvolle Quantifizierung setzt immer einen sauberen Umgang mit Begriffen und eine daraus resultierende präzise Beschreibung voraus (was z.B. bei der Quantifizierung durch das Schulnotensystem nicht unbedingt zutreffend ist). Darin mag gerade ein Teil des Fortschritts bestehen.

Daß die Mathematik mittels Modellierungen dazu eingesetzt werden kann, zum Verständnis der uns umgebenden realen Welt beizutragen, entspringt keineswegs dem Diktat des gegenwärtigen Nützlichkeits- und Effizienzwahns. Vielmehr ist dieses Bestreben von Anfang an in der Mathematik angelegt, wie ein Blick in die Geschichte der Mathematik belegt. Wie kein anderes Volk betrieben die Alten Griechen leidenschaftlich Geometrie und erzielten auf diesem Gebiet schon vor mehr als 2200 Jahren erstaunliche Ergebnsisse. Den Griechen verdanken wir auch die Bezeichnung *Geometrie*, was soviel wir *Erd(ver)messung* heißt.

Geometrie zusammengesetzt aus den griechischen Worten: γή = Erde, Land, Acker, Boden und μετρέω = messen, ausmessen, zumessen.

Geometrische Modelle der Antike zur Vermessung der Welt

Die Geometrie war in der Antike eine (im wörtlichen Sinne) bodenständige Wissenschaft, denn ihr Name war Programm. Die griechischen Gelehrten wußten sich ihrer meisterhaft zu bedienen, um nicht nur die Erde selbst sondern auch den Weltraum zu vermessen:

Wie groß ist die Erde? Bestimmung des Erdradius nach *Eratosthenes*

Wie groß ist der Mond?
Bestimmung des Verhältnis Mondradius zu Erdradius nach *Aristarch.*
Daraus folgt: Abstandsbestimmung Erde – Mond (alternativ zum Parallaxenverfahren)

Wie weit ist die Sonne weg und wie groß ist sie?
Bestimmung des Verhältnis Abstand Erde – Sonne zu Erde – Mond nach *Aristarch*
Daraus folgt: Verhältnisbestimmung Sonnenradius zu Erdradius

Aus folgenden Gründen wollen wir uns diese Modellierungs-Beispiele genauer ansehen:

1) Wegen ihrer historischen Bedeutung.

2) Um zu zeigen, wie in der Praxis (meist recht flüchtig) modelliert wird, weil man primär an schnellen Ergebnissen interessiert ist und sich nicht mit langen Definitionen und Erklärungen aufhalten will.

Insbesondere sollen gerade die implizit gemachten Annahmen diskutiert werden, die (auch heute) in vielen Büchern und Darstellungen zu diesem Thema unterschlagen werden. Wem also die Argumentationen und Herleitungen etwas „unheimlich" vorkommen, der gehe diesem Gefühl nach und versuche durch Fragenstellen seine Ursache ausfindig zu machen.

Aufgrund seiner Messungen postulierte Aristarch schon mehr als 200 Jahre vor Christi Geburt ein **heliozentrisches Weltbild**.