Mathematische Modellierung

„Get involved!“ – Differentialgleichungen anhand zweier Beispiele *am eigenen Leib* erleben.

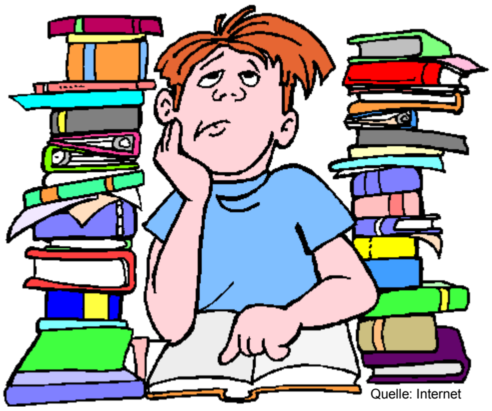
Werden Sie selbst zum Protagonisten des Modellierungsproblems!

Martin Rheinländer
FB Mathematik & Statistik
Universität Konstanz

Skript zum 4. Vorlesungstermin (13. Mai 2009)
Vorlesung : Mi 10–12 in P712, Übung: Mi 9–10 in P603 und 13-14 in R511

martin.rheinlaender@uni-konstanz.de
Büro: G414 a, Tel. 88 3648

Prüfungsvorbereitung



Quelle: Internet

Je mehr man lernt, desto mehr weiß man.

Je mehr man weiß, desto mehr vergißt man.

Je mehr man vergißt, desto weniger weiß man.

Wozu also lernen?

Truman Capote
US Schriftsteller

Wie lange sollte man lernen?
Welche Note kann man erwarten?
Wofür sollte man lernen?

→ Kann man diese Fragen zumindest ansatzweise mit Mathematik beantworten?

Modellieren einer Lernphase zur Prüfungsvorbereitung.

Die obige Sentenz geht auf den US Schriftsteller Truman Capote zurück, der diese gelegentlich eines Interviews zur Bildungspolitik geäußert haben soll. Die Fragen, *was* und *wofür* man lernen sollte, lassen sich i.a. nicht mit Hilfe von Mathematik beantworten.

Prüfungsvorbereitung Diskretes Modell

- *maximaler Stoffumfang*: Buch von z.B. 160 Seiten
- **tägliche Wissensaufnahme** L (z.B. 9 Seiten $\rightarrow L=9$)
- **Merkfähigkeit** $0 \leq M \leq 1$: Wissensanteil, welcher über Nacht behalten wird.
- **Vergeßlichkeit** $0 \leq V \leq 1$: Wissensanteil, welcher über Nacht vergessen wird.
- *Wissen am Tag* n (jeweils nach Lernsession): $W(n)$
- Beziehung zwischen Merkfähigkeit & Vergeßlichkeit: $M+V=1$

Es genügt daher einen der Koeffizienten zu kennen.

0.Tag: $W(0) = 0$

1.Tag: $W(1) = L$

2.Tag: $W(2) = ML+L$

3.Tag: $W(3) = M(ML+L)+L = M^2L+ML+L$

$$\Rightarrow \begin{cases} W(0)=0 \\ W(n+1) = M\,W(n)+L \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$W(n) = L\sum_{k=0}^{n-1} M^k = L\frac{1-M^n}{1-M} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} W(n) = L\frac{1}{1-M} = L/V$$

Man beachte das Auftreten der **geometrischen Reihe**.

Prüfungsvorbereitung Kontinuierliches Modell

- **Lernrate** l = Wissensmenge, die pro Zeiteinheit aufgenommen wird.
- **Vergeßlichkeitsrate** v = Wissensanteil, der pro Wisseneinheit in einer Zeiteinheit verloren geht.
- *Wissen* zum *Zeitpunkt* t : $w(t)$

Gesuchte unbekannte Funktion, für die zunächst eine Bestimmungsgleichung benötigt wird.

$$w(t+\Delta t) = w(t) - vw(t)\Delta t + l\Delta t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t} = -vw(t)+l$$

Übergang zum Grenzwert $\Delta t \rightarrow 0$:
Differenzenquotient $\rightarrow$ *Differentialquotient* (Ableitung)

$$\text{AWP}: \begin{cases} w(0)=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -vw(t)+l \end{cases}$$

Wie läßt sich (die)Lösung finden?
Tafelrechnung

$$\Rightarrow \quad w(t) = -\frac{l}{v}\exp(-vt) + \frac{l}{v}$$

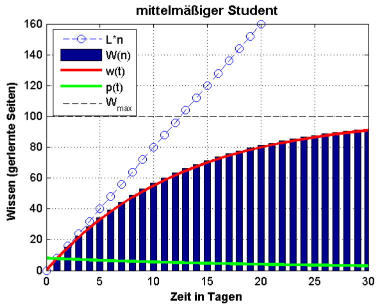
Verhalten im Unendlichen: $\lim_{t\to\infty} w(t) = \frac{l}{v}$

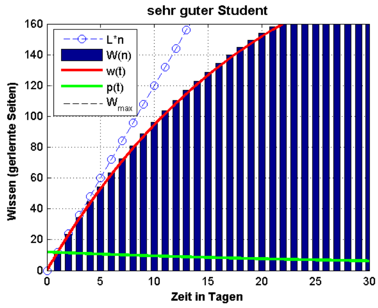
Formale Berechnung der Lösung mittels *Trennung der Variablen* (homogene Gleichung) und *Variation der Konstanten* (spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung).

Prüfungsvorbereitung

Auswertung & Vergleich

Prüfungsrelevantes Wissen: Skript von 160 Seiten





	mittelmäßiger Student	sehr guter Student
Lernrate L=l	8	12
Vergeßlichkeit V=v	8%	5%

Leistung: $p(t) = \mathcal{L}(t)$

Selbst wenn der mittelmäßige Student noch so lange lernt, wird er maximal nur kanpp 2/3 des Skripts beherrschen, da sein Wissen vorzeitig in die Sättigungsphase (Stagnation) kommt. Durch eine besonders lange Lernperiode kann der Student seine nur mäßige Lernrate und die rasche Vergeß-lichkeit nicht ausgleichen. Für die Vorbereitungszeit der Prüfung sollten daher nicht wesentlich mehr als 30 Tage eingeplant werden.

Prüfungsvorbereitung

Zur Leistungsbewertung

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{erworbenes Wissen}}{\text{benötigte Zeit}}$$

Lernleistung: $\mathcal{L}(t) := \dfrac{w(t)}{t}$ für $t > 0$ und $\mathcal{L}(0) := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{w(t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\dot{w}(t)}{1} = \dot{w}(0) = l$

Behauptung: Maximale (punktuelle) Lernleistung wird zu Beginn der Lernphase erreicht:

$$\sup_{0\le t<\infty} \mathcal{L}(t) = \mathcal{L}(0) = l \ .$$

Beweis: Zeige $\dot{\mathcal{L}}(t) = \dfrac{\dot{w}(t)t - w(t)}{t^2} \overset{!}{\le} 0.$

$$\operatorname{sgn}\big(\dot{\mathcal{L}}(t)\big) = \operatorname{sgn}\left(\frac{tl\,e^{-vt} + \frac{l}{v}e^{-vt} - \frac{l}{v}}{t^2}\right) = \operatorname{sgn}\left(\tfrac{l}{vt^2}\right)\operatorname{sgn}\left(vt\,e^{-vt} + e^{-vt} - 1\right) = \operatorname{sgn}\left((1+x)e^{-x} - 1\right)$$

$$f(x) := (1+x)e^{-x} - 1 \quad \Rightarrow \quad \left[f(0) = 0, \quad f'(x) = -x\,e^{-x} \le 0 \ \text{ für } \ x \ge 0\right] \quad \Rightarrow \quad f(x) \le 0 \ \text{ für } \ x \ge 0.$$

■

Frage: Wie & Was wird in einer tatsächlichen Prüfung bewertet?
Welcher Leistungsbegriff liegt dem Bewertungsmaßstab zugrunde?

Erinnerung: $w(t) = -\frac{l}{v}\exp(-vt) + \frac{l}{v}$

Prüfungsvorbereitung

Modellbewertung

Leider eignen sich die beiden Modelle wohl kaum für zuverlässige quantitative Berechnungen, da allein die Vergeßlichkeit bzw. Merkfähigkeit schwer zu ermittelnde Größen sind, die von vielen Faktoren beeinflußt werden. Ferner ist Lernen nicht gleich Lernen: so muß man zwischen reinem Auswendiglernen und dem Verstehen von Zusammenhängen unterscheiden. Lernen ist ein allzu komplexer Prozeß, als daß er durch derart einfache Modelle hinreichend gut modelliert werden könnte. Dennoch liefern die beiden Modelle eine **qualitative Erklärung** für einige Effekte, die sich beim Lernen bzw. Trainieren bemerkbar machen und mit der Erfahrung vieler Menschen übereinstimmen.

• ***Eingeflossene Annahme*** : „vergessenes Wissen" ist proportional zum vorhandenen Wissen. *„Je mehr man weiß desto mehr man vergißt.*"

•**„Aller Anfang ist leicht."** Der Wissenszuwachs ist anfangs maximal, weshalb sich zu Beginn Erfolgserlebnisse beim Lernen leichter erzielen lassen als später. Insbesondere kann man sich die Grundlagen eines Fachgebietes meist schnell aneignen, während die darauf aufbauenden Details oft viel weniger eingängig sind (Zunahme der Komplexität des Lehrstoffs).

• Je höher das Ziel desto größer der notwendige tägliche Einsatz. Die Intensität des Lernens entscheidet wesentlich darüber, welches Wissensniveau generell erreicht werden kann. Spitzensportler und Konzertmusiker müssen nicht nur über Jahre hinweg sondern auch täglich intensiv trainieren, um ein Top-Niveau zu erreichen bzw. zu halten.

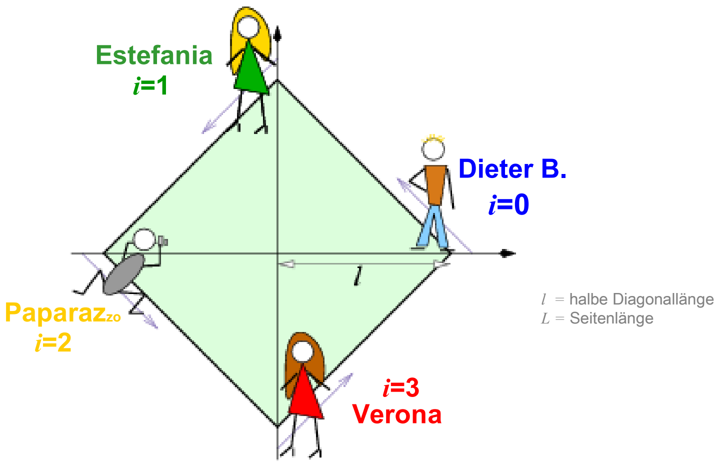
• Es gibt so etwas wie ein Sättigungslevel des persönlichen Wissens. Das neu hinzukommende Wissen scheint das bisherige Wissen zu verdrängen, so daß das Gesamtwissen konstant bleibt. Die Sättigungsgrenze läßt sich nur durch ein erhöhtes tägliches Lernpensum anheben.

• Regelmäßiges Wiederholen ist notwendig, um Wissensverlust durch Vergessen entgegenzuwirken (zu kompensieren).

Üblicherweise heißt es: **Aller Anfang ist schwer.** Dieser Eindruck ist sicherlich auch bei vielen Studienanfängern vorhanden und in gewisser Weise zutreffend. Dennoch haben viele Uniabsolventen rückblickend den Eindruck, besonders viel in den ersten Semestern gelernt zu haben. Ebenso teilen wahrscheinlich viele Menschen auch den Eindruck, während ihrer Grundschulzeit mehr gelernt zu haben als auf der daruffolgenden weiterführenden Schule.

Der „Tanz"

Problemstellung

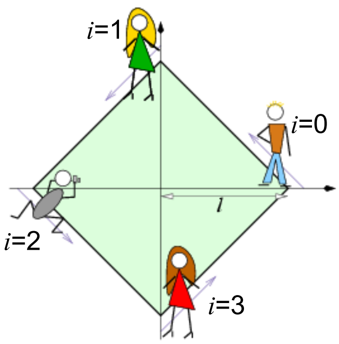


Gibt es ein Aufeinandertreffen (Rendez-Vous)?

Wenn ja, wann und wo? *„Trajektorien"* der Personen ?

Jede Person bewegt sich mit konstanter Schnelligkeit stets genau auf die Person ihres Interesses zu (d.h. auf den jeweiligen „Vordermann" im Uhrzeigersinn betrachtet). Welche **Bewegung** resultiert aus dieser **Bewegungsvorschrift**?

Der „Tanz“ Vollständiges DGL-System



$$\left.\begin{array}{ll}\dot{\mathbf{x}}_0 = s\,\dfrac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_0\|} & \mathbf{x}_0(0)=l\mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{x}}_1 = s\,\dfrac{\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|} & \mathbf{x}_1(0)=l\mathbf{e}_y \\ \dot{\mathbf{x}}_2 = s\,\dfrac{\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_3-\mathbf{x}_2\|} & \mathbf{x}_2(0)=-l\mathbf{e}_x \\ \dot{\mathbf{x}}_3 = s\,\dfrac{\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_0-\mathbf{x}_3\|} & \mathbf{x}_3(0)=-l\mathbf{e}_y \end{array}\right\}\ \text{(AWP)}$$

System 4 gekoppelter, nichtlinearer vektorieller DGLn 1. Ordnung *à* 2 Komponenten

→ AWP mit 8 Unbekannten

$$\dot{\mathbf{x}}_i = s\,\frac{\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i\|} \qquad i \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \overline{\{0,1,2,3\}}$$

Der „Tanz“ Symmetrie & Variablen-Reduktion

Lemma: Es sei $\mathbf{R} := \mathbf{R}(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Das reduzierte Anfangswertproblem

$$\left.\dot{\mathbf{z}} = s\frac{\mathbf{Rz}-\mathbf{z}}{\|\mathbf{Rz}-\mathbf{z}\|} \qquad \mathbf{z}(0)=l\mathbf{e}_x\right\}\ \text{(rAWP)}.$$

habe eine eindeutige Lösung $\mathbf{z}$. Unter der Annahme, daß auch die Lösung $(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$ von (AWP) eindeutig ist, gilt:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{R}^i\mathbf{z} \qquad i \in \overline{\{0,1,2,3\}}\,.$$

Beweis: Einsetzen der Behauptung in $\dot{\mathbf{x}}_i = s\,\frac{\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_{i+1}-\mathbf{x}_i\|}$ liefert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathbf{R}^i\mathbf{z}\right) = s\,\frac{\mathbf{R}^{i+1}\mathbf{z}-\mathbf{R}^i\mathbf{z}}{\|\mathbf{R}^{i+1}\mathbf{z}-\mathbf{R}^i\mathbf{z}\|} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{R}^i\dot{\mathbf{z}} = s\,\mathbf{R}^i\frac{\mathbf{Rz}-\mathbf{z}}{\|\mathbf{R}^i(\mathbf{Rz}-\mathbf{z})\|}$$

Benutze Linearität und Invertierbarkeit von $\mathbf{R}^i$.

Beachte, daß Norm *invariant* unter Drehungen ist.

$$\Leftrightarrow\quad \dot{\mathbf{z}} = s\,\frac{\mathbf{Rz}-\mathbf{z}}{\|\mathbf{Rz}-\mathbf{z}\|}$$ (wahr nach Voraussetzung)

Wegen $\mathbf{x}_i(0) = \mathbf{R}^i\mathbf{z}(0)$ folgt Behauptung aus Eindeutigkeit. ■

Der „Tanz“ — Analytisches Lösen von (rAWP)

Ansatz in Polarkoordinaten:

$$\mathbf{z}(t)=\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi(t)) \\ r(t)\sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} = r(t)\,\mathbf{e}_\rho(\varphi(t))$$

Vorbemerkung: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\mathbf{e}_\rho(\phi)=\begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}=\mathbf{R}\mathbf{e}_\rho(\phi)=\mathbf{e}_\phi(\phi) \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{e}_\phi(\phi)-\mathbf{e}_\rho(\phi)\|=\sqrt{2}$

Ansatz einsetzen in $\dot{\mathbf{z}}=s\,\frac{\mathbf{R}\mathbf{z}-\mathbf{z}}{\|\mathbf{R}\mathbf{z}-\mathbf{z}\|}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r(t)\mathbf{e}_\rho(\varphi(t))\big) = \dot{r}\mathbf{e}_\rho + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\phi \overset{!}{=} s\,\frac{\mathbf{e}_\phi-\mathbf{e}_\rho}{\|\mathbf{e}_\phi-\mathbf{e}_\rho\|} = \frac{s}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\phi-\mathbf{e}_\rho)$$

Koeffizientenvergleich bzw. Multiplikation mit $\mathbf{e}_\rho(\varphi(t)),\ \mathbf{e}_\phi(\varphi(t))$

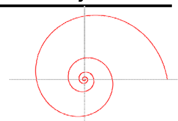
$$\begin{cases} \dot{r}=-\frac{s}{\sqrt{2}},\quad r(0)=l & \Rightarrow \quad r(t)=l-\frac{s}{\sqrt{2}}t=\frac{1}{\sqrt{2}}(L-st) \\ \dot{\varphi}=\frac{s}{\sqrt{2}}r^{-1},\quad \varphi(0)=0 & \Rightarrow \quad \varphi(t)=\ln\left(\frac{L}{L-st}\right) \qquad L=\sqrt{2}\,l \end{cases}$$

Beobachtung: Lösung existiert nur auf *endlichem* Zeitintervall $[0,L/s)$.

Der „Tanz“ — Diskussion der Trajektorien

$$\left.\begin{matrix} r(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(L-st) \\ \varphi(t)=\ln\left(\frac{L}{L-st}\right) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad r(\phi)=\frac{L}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\phi} \quad \phi\in[0,\infty)=\varphi([0,L/s))$$

Parametrisierung in Polarkoordinaten



→ Parametrisierung in kartesischen Koordinaten: $\mathbf{z}(\phi)=\begin{pmatrix} z_1(\phi) \\ z_2(\phi) \end{pmatrix}=\frac{L}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\phi}\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$

Länge $\int_0^\infty \|\dot{\mathbf{z}}(\phi)\|\,\mathrm{d}\phi < \infty$ # Windungen $\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{z_1\dot{z}_2-z_2\dot{z}_1}{z_1^2+z_2^2}\,\mathrm{d}\phi=\infty$

Selbstähnlichkeit (*Eadem mutata resurgo,* Jacob Bernoulli): $\mathbf{z}(\phi+\psi)=\mathrm{e}^{-\psi}\,\mathbf{R}(\psi)\mathbf{z}(\phi) \qquad \phi,\psi\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^{-(\phi+\psi)}\begin{pmatrix} \cos(\phi+\psi) \\ \sin(\phi+\psi) \end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{e}^{-\psi}\begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\psi)-\sin(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\phi)\cos(\psi)+\cos(\phi)\sin(\psi) \end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-\phi}\mathrm{e}^{-\psi}\begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Vorkommen der logaritmischen Spirale $\phi\mapsto ab^\phi$ (*spira mirabilis*) in der Natur:

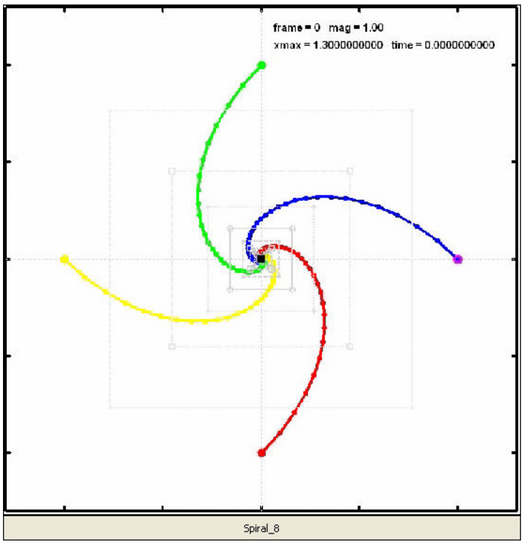



Eadem mutata resurgo = Verwandelt erscheine ich als dieselbige.

Bildquelle: Wikipedia

Der „Tanz“

Zoom in die *Logarithmische Spirale*



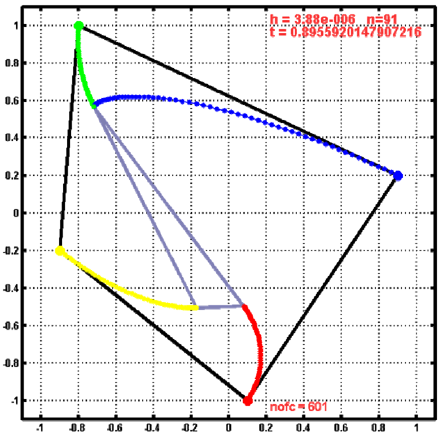
Zoom demonstriert die *Selbstähnlichkeit* der Logarithmischen Spirale, denn beim Zoomen verändert die Spirale nicht ihr Aussehen, sondern scheint sich lediglich zu drehen.

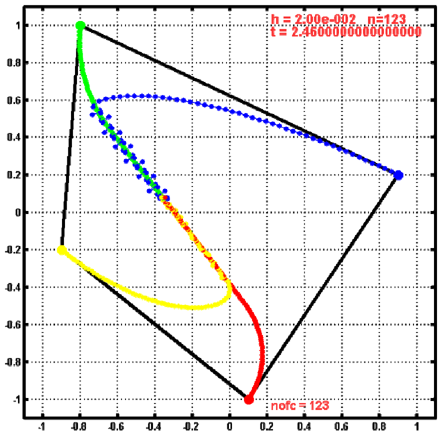
Der „Tanz“

Asymmetrischer Fall

Eingebettetes RK4(3) Verfahren $TOL = 10^{-7}$

Euler- Verfahren (Schrittweite h=0.02)





Das genaue Verfahren (links) „stoppt“ , sobald sich zwei Personen begegnet sind und die Lösung eine Singularität erreicht hat.
Das grobe Verfahren (rechts) geht darüber hinweg, verhält sich aber dennoch sehr sinnvoll.

Die vier Personen sind an den Ecken eines unregelmässigen Vierecks postiert und bewegen sich mit unterschiedlichen Schnelligkeiten: $s_0=1.9$, $s_1=0.5$, $s_2=0.9$, $s_3=0.6$

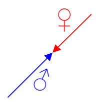
Im allgemeinen asymmetrischen Fall, läßt sich die Lösung nicht mehr analytisch berechnen. Daher ist man hier auf **numerische Verfahren** zur Berechnung der Lösung des Differentialgleichungssystems angewiesen.

Der „Tanz“ Ausblick

Eine scheinbar leichte Modifikation der Gleichungen führt zu einem sehr unterschiedlichen Verhalten der Lösungen. Ein „Fliegenschiß“ (Ableitung) mehr auf der linken Seite sowie eine kleine Änderung des Nenners auf der rechten Seite (3 statt 1 im Exponenten) führt vom *Zwei-Personen Rendez-Vous* (System 1. Ordnung) zum bekannten *Zwei-Körper Problem* (System 2. Ordnung).

Zwei-Personen Rendez-Vous

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_E = s\dfrac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_E}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_E\|} & \mathbf{x}_E(0) = \ldots, \\ \dot{\mathbf{x}}_S = s\dfrac{\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S}{\|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S\|} & \mathbf{x}_S(0) = \ldots, \end{cases}$$

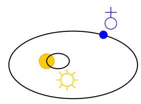


beschreibt direktes Aufeinanderzulaufen zweier Personen. Lösungen haben nur endliche Lebensdauer, bis zum Treffen der beiden Personen.

Mathematisch(!) langweilig.

Zwei-Körper Problem

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{x}}_E = \gamma\dfrac{\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_E}{\|\mathbf{x}_S - \mathbf{x}_E\|^3} & \mathbf{x}_E(0) = \ldots, \quad \dot{\mathbf{x}}_E(0) = \ldots \\ \ddot{\mathbf{x}}_S = \gamma\dfrac{\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S}{\|\mathbf{x}_E - \mathbf{x}_S\|^3} & \mathbf{x}_S(0) = \ldots, \quad \dot{\mathbf{x}}_S(0) = \ldots \end{cases}$$



beschreibt Bewegung zweier Himmelskörper, z.B. die Bewegung der Erde um die Sonne. Größere Lösungsvielfalt. Insbesondere ergeben sich periodische Lösungen bei geeigneter Initialisierung.

Mathematisch deutlich interessanter!

Aufgaben:

1) Diskutieren Sie den „Tanz von n Personen“, welche anfänglich auf den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks postiert sind.
2) Wie ändert sich die Lösung von (AWP) bzw. (rAWP), wenn man auf das Dividieren der Beträge verzichtet?
3) Diskutieren Sie die Stetigkeit der Funktion F definiert durch:

$$F(\mathbf{z}) := \frac{\mathbf{Rz} - \mathbf{z}}{\|\mathbf{Rz} - \mathbf{z}\|}$$