Mathematische Modellierung

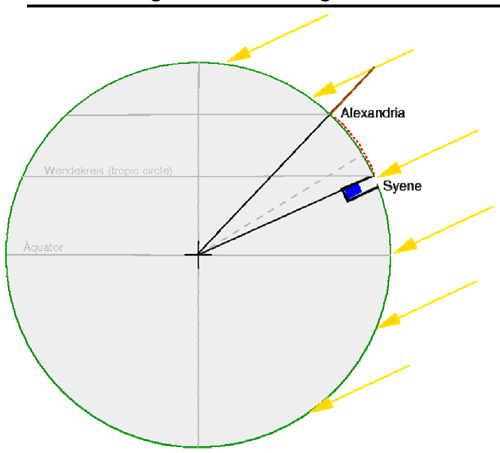
„Vermessung der Welt“ – Teil 1

Martin Rheinländer
FB Mathematik & Statistik
Universität Konstanz

Skript zum 2. Vorlesungstermin (29. April 2009)
Vorlesung : Mi 10 – 12, P712, Übung: Mi 8 – 10, P603 (vierzehntägl.)

martin.rheinlaender@uni-konstanz.de
Büro: G414 a, Tel. 88 3648

Bestimmung des Erdumfangs nach *Eratosthenes* (276–194 v.Chr.)



„Seitlicher“ Schnitt durch die Erde.

Begründung der Skizze: Die Schnittebene wird durch die beiden Erdradien bei Syene und Alexandria aufgespannt. Insbesondere liegt die Schnittebene parallel zu den Sonnenstrahlen, da diese ‖ zum Erdradius bei Syene verlaufen. Somit durchstoßen die Sonnenstrahlen die Ebene nicht, wie dies im allgemeinen der Fall ist, sondern liegen in der Ebene.

Beobachtung:

- Einmal im Jahr, zur *Sommersonnenwende,* steht die Sonne mittags im Zenit über *Syene.* ⇒ Dies macht sich z.B. durch den fehlenden Schattenwurf freistehender Objekte bemerkbar. Auffällig ist auch, daß sich die Sonne im Wasserspiegel selbst tiefer Brunnen widerspiegelt.
- Zur gleichen Zeit steht die Sonne jedoch **nicht** ⊥ über *Alexandria*.

Die besondere Leistung des Eratosthenes:

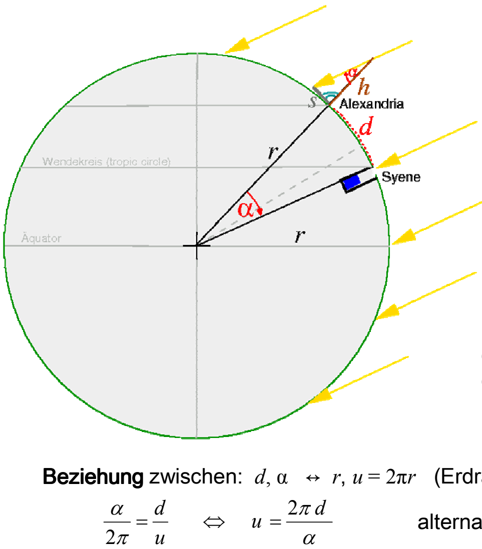
Unter der Annahme, daß die Erde eine Kugel ist, erkannte Eratosthenes, daß sich bereits die obigen Beobachtungen dazu nutzen lassen, den **Erdradius** bzw. den **Erdumfang** zu bestimmen. *Seine Idee ist ebenso genial wie simpel.*

Die tatsächliche Position Alexandriens wird durch den gestrichelten Radius angezeigt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde die Lage Alexandrias weiter in den Norden verschoben. Die antike Stadt Syene in Oberägypten entspricht dem heutigen Assuan.

Zur geographischen Lage von Alexandria & Syene (Assuan)

Bildquelle: Internet

Bestimmung des Erdumfangs nach *Eratosthenes* (Forts.)



Annahmen:

•Die auf die Erde fallenden Sonnenstrahlen sind sämtlich ‖.

•Die Erde ist **kugelförmig**.

•(Folgerung) Sonnenstrahlen treffen bei Syene ⊥ auf Erdoberfläche ⇔ Sonnenstrahlen sind ‖ zur Verbindungslinie Syene–Erdmittelpunkt.

Bekannt: d = Abstand Alexandria – Syene

Gesucht: α = Winkel zwischen den Erdradien, die jeweils Alexandria bzw. Syene mit dem Erdmittelpunkt verbinden.

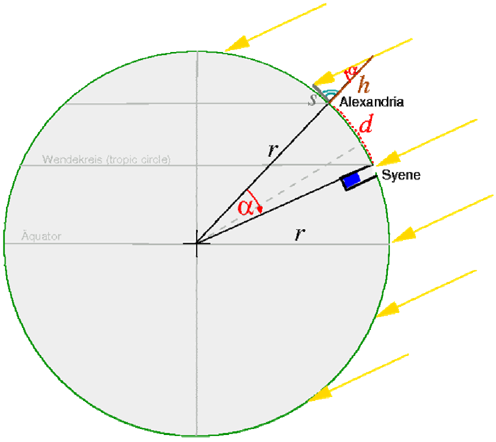
Die Kenntnis von α und d *genügt, um den Erdradius bzw. Erdumfang zu bestimmen.*

Beziehung zwischen: $d, \alpha \leftrightarrow r, u = 2\pi r$ (Erdradius, Erdumfang):

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{d}{u} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{2\pi\, d}{\alpha} \qquad \text{alternativ:} \qquad d = r\alpha \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{d}{\alpha}$$

Aus Annahme 1 läßt sich schließen, daß die Erdoberfläche gekrümmt sein muß. Da Sonne und Mond am Himmel als Kreisscheiben erscheinen, liegt die Vermutung nahe, daß beide Himmelskörper eine kugelförmige Gestalt haben, sofern es sich um ausgedehnte dreidimensionale Objekte handelt. Betrachtet man die Erde ebenfalls als einen „gleichberechtigten“ Himmelskörper, der nur zufälligerweise von uns Menschen bewohnt wird, so wird man per Analogieschluß zunächst auch von einer Kugelgestalt ausgehen. Es wäre interessant zu wissen, inwieweit Eratosthenes im Hinblick auf die Annahmen 1) und 2) von den Arbeiten seines älteren Kollegen Aristarch von Samos gewußt hat.

Bestimmung des Erdumfangs nach *Eratosthenes* (Forts.)



Bestimmung von α:

Während die Sonne in Syene im Zenit steht, mißt man in Alexandria die Schattenlänge s eines Stabes bekannter Höhe h. Es gilt:

$$\tan\alpha = s / h$$

Zusätzliche Annahme zum Abpassen des „richtigen“ Augenblicks

Woher wußte Eratosthenes in Alexandrien, wann in Syene die Sonne senkrecht steht? Vermutlich war ihm bereits bekannt, daß Tag und Nacht sowie der tägliche Lauf der Sonne von der Rotation der Erde um ihre eigene Achse herrühren. **Eratosthenes mußte annehmen, daß Alexandrien und Syene auf demselben *Meridian* (Mittagslinie, Längenhalbkreis) liegen.** Da an den Punkten eines Meridians die Sonne per Definition immer gleichzeitig *kulminiert*, muß die Schattenlängenmessung genau zur Mittagszeit in Alexandrien (also beim höchsten Sonnenstand bzw. bei der kürzesten Schattenlänge) durchgeführt werden und zwar am Tag der Sommersonnenwende, an dem die Mittagssonne in Syene gerade den Zenit erreicht.

α = ∢(Radius Alexandria, Radius Syene)= ∢(Stab, Sonnenstrahlen) da *Wechselwinkel* („Z-Winkel“) an parallelen Geraden. Hier geht die Annahme der Parallelität der Sonnenstrahlen wesentlich ein.

Erdradius bzw. Erdumfang ergeben sich aus schlußendlich aus drei Längenmessungen nämlich der Größen h,s und d.

$$r = \frac{d}{\arctan s/h} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{2\pi d}{\arctan s/h}$$

Bestimmung des Erdumfangs nach *Eratosthenes* (Forts.)

Abschließende Rechnung des Eratosthenes:

•Entfernung Alexandria–Syene: 50 Tagesmärsche einer Kamelkarawane.

•Durschnittlich zurückgelegte Strecke pro Tagesmarsch: 100 Stadien.

•Winkel $\alpha = 1/50$ des Vollkreises.

$\Rightarrow$ Erdumfang $= 50$ Stad./Tag · 100 Tage · 50 = 250000 Stadien.

Im Gegensatz zu den heutigen SI-Einheiten, war das antike Längenmaß *Stadion* (=600 Fuß) nicht eindeutig definiert. Der Umrechnungsfaktor schwankt zwischen 150m und 210m. Setzt man 1 Stadion = 160m, so ergeben sich genau 40000 km für den Erdumfang, was dem tatsächlichen Äquatorialumfang der Erde sehr nahe kommt.

Kommentar – Mögliche Fehlerquellen:

•Für die Berechnung des Erdumfangs ist nicht der Reiseroutenabstand (Straßenkilometer) sondern die in aller Regel deutlich geringere **Luftliniendistanz,** welcher für Alexandria–Syene ca. 850 km beträgt. Setzt man in der Entfernungsberechnung des Eratosthenes 1 Stadion = 160 m = 0.16 km so kommt man auf eine Entfernung von 800 km. Somit hätte die Karawane einen Weg gefunden, der kürzer als die Luftliniendistanz ist!

•Tatsächlich liegt Syene das heutige Assuan (Aswan), $38' = 0.633°$ etwas „oberhalb“ des nördlichen Wendekreises. Daher steht die Sonne dort niemals exakt im Zenit.

•Ebenso liegen Alexandria und Syene nicht auf dem gleichen Merdian, wie zunächst angenommen. Der Längenunterschied beträgt 3°, d.h. die Sonne erreicht in Alexandria ihren mittäglichen Höchststand ca. 1/5 Stunde = 12 Minuten später als in Syene. Man kann diesen Umstand korrigieren, indem man entweder die Schattenlängenmessung 12 Minuten vor Mittag durchführt oder aber den Abstand Alexandria–Wendekreis statt des Abstands Alexandria–Syene in die Rechnung einfließen läßt.

Quelle der Angaben: Kulturgeschichte der Physik von K. Simonyi.
Beachte: 360°/24 h = 15°/h. Ein Längenunterschied von 15° entspricht einem Zeitunterschied von 1 Stunde.

Exkurs: Entfernungsberechnung auf der Erde (Kugel)

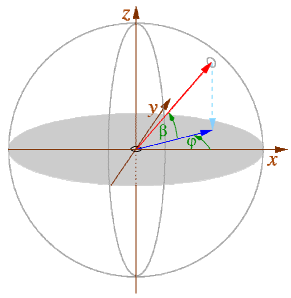
Gesucht: Abstand Alexandria (31° 13'N, 29° 58'E) – Nördlicher Wendekreis (23° 26' N),
Abstand Alexandria – Syene (24° 4'N, 32° 57' E).

Koordinaten auf der Erde: Breiten- und Längengerade → Kugelkoordinaten:
Ursprung = Erdmittelpunkt, Polarachse = Rotationsachse der Erde (von Pol zu Pol)
Azimutalebene = Äquatorialebene.

Positionsangabe $(\beta, \varphi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$ Beachte: Radius r ist auf Erdoberfläche konstant.

Umrechnen in kartesisches KS: xy-Ebene = Äquatorialebene, z-Achse = Rotationsachse.
$(\beta=0, \varphi=0)$ entspricht positiver x-Achse, $(\beta=0, \varphi=\pi/2)$ positiver y-Achse.

Ortsvektor zu (β, φ): $R \begin{pmatrix} \cos\beta \cos\varphi \\ \cos\beta \sin\varphi \\ \sin\beta \end{pmatrix}$, $R =$ Erdradius

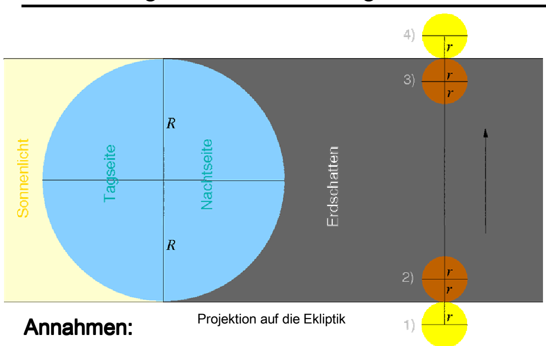


Abstand zweier Punkte auf der Erde, genauer die Länge des verbindenden **Großkreisbogens**, ergibt sich als Winkel zwischen den zugehörigen Ortsvektoren mal Erdradius:

$$d\big((\beta_1,\varphi_1),(\beta_2,\varphi_2)\big) = R \arccos\left\langle \begin{pmatrix} \cos\beta_1 \cos\varphi_1 \\ \cos\beta_1 \sin\varphi_1 \\ \sin\beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\beta_2 \cos\varphi_2 \\ \cos\beta_2 \sin\varphi_2 \\ \sin\beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Bei den geographischen Koordinaten wird der Breitenwinkel bzgl. der Azimutalebene (sprich Äquatorialebene) verwendet, nicht wie sonst bei Polarkoordinaten meist üblich der Polarwinkel bzgl. der Polarachse. Es gilt: Polarwinkel = $\pi/2$ – Breitenwinkel.
Warum entspricht der Großkreisbogen tatsächlich der kürzesten Verbindungslinie ? → Differentialgeometrie (geodätische Kurven).

Bestimmung der relativen Mondgröße nach *Aristarch von Samos* (310-230 v.Chr.)



Projektion auf die Ekliptik

Idee → Mondfinsternis:

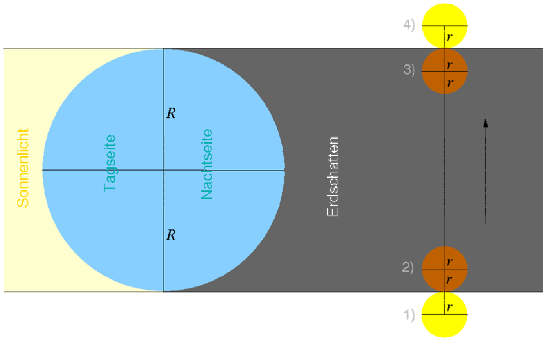
Vergleiche Zeit, die Mond zum vollständigen Eintauchen in Erdschatten braucht, mit Zeit, die Mond zum Durchlaufen des Erdschattens benötigt.

Diese Idee zeichnet dadurch aus, daß sie nur sehr einfache Messungen erfordert, die schon mit bloßem Auge und einer einfachen Armbanduhr durchgeführt werden können.

Annahmen:

- Erde und Mond sind kugelförmige Himmelskörper. (Für Erde weit weniger offensichtlich als für Mond!)
- Sonnenlicht fällt völlig parallel auf Erde ⇒ zylindrischer Erdschatten (streifenartig in 2D).
- Erde und Mond bewegen sich in einer **gemeinsamen** Ebene (Ekliptik).
- Die Umlaufbahn des Mondes ist sehr groß im Vergleich zum Erddurchmesser, so daß der Mond den Erdschatten praktisch auf einer geraden Linie durchwandert.
- Der Mond durquert den Erdschatten senkrecht zur Verbindungslinie Erde–Sonne bzw. zur Achse des Schattens.
- Die Bewegung der Erde um die Sonne ist vernachlässigbar, d.h. die Erde wird als stillstehend angesehen.

Bestimmung der relativen Mondgröße nach *Aristarch* (Forts.)



R = Radius der Erde

r = Radius des Mondes

t = Dauer der Ein- bzw. Austrittsphase in bzw. aus dem Erdschatten: 1) → 2), 3) → 4)

T = Zeitspanne (Verweildauer), währenddessen Mond Erdschatten durchquert: 2) → 3)

Weitere Annahme: Mond bewegt sich gleichförmig mit konstanter Schnelligkeit $c>0$.

Es folgt: $c = \frac{2r}{t}$ und $c = \frac{2R-2r}{T}$ → Gleichsetzen und Auflösen nach r bzw. $\frac{R}{r}$:

$$\frac{2r}{t} = \frac{2R-2r}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{r}{t} + \frac{r}{T} = \frac{R}{T} \quad \Leftrightarrow \quad r(t+T) = Rt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{R}{r} = \frac{T+t}{t} > 1$$

Beachte: Es hat den Anschein, als ob sich aus dem Modell folgern ließe, die Erde sei größer als der Mond ($R>r$), was *a priori* ja nicht zutreffend sein muß. Tatsächlich fließt die Annahme, die Erde sei größer als der Mond, implizit in die Definition der Zeitspannen wie in die obige Rechnung mit ein, indem wir $c=2(R-r)/T$ setzen und $c>0$ verlangen. Geht man jedoch davon aus, daß der Mond die Erde an Größe übertrifft, so sind auch die Zeitspannen t, T anders zu definieren, weil der Mond dann gar nicht vollständig in den Erdschatten eintauchen kann.

Auswertung für eine konkrete Mondfinsternis

Beispiel einer totalen Mondfinsternis (3./4. März 2007):

22:30 h Mond tritt in (Kern-)Schatten ein.

23:43 h Mond fast unsichtbar, da vollständig in Kernschatten eingetreten (Beginn der Totalitätsphase).

00:58 h Ende der Totalität; allmähliches Auftauchen des Mondes aus dem Kernschatten.

02:13 h Mond hat Kernschatten vollständig verlassen.

$\Rightarrow \; t = 73 \text{ min}, \quad T = 75 \text{ min}$

$\Rightarrow \; \frac{R}{r} = \frac{T+t}{t} = \frac{75+73}{73} \approx 2.0274$

Tatsächlich gilt: $R/r \approx 3.66$.

Somit ergibt sich ein zu großer Wert für den Mondradius.

Beachte jedoch: Bei dieser speziellen Mondfinsternis wandert der Mond nördlich am Zentrum des Kernschattens vorbei, daher ist die Totalitätsphase kürzer als bei anderen Mondfinsternissen, wo der Mond auch das Zentrum des Schattens erreicht (siehe Ahnerts Astronomisches Jahrbuch 2007). Dann sollte sich ein realistischerer Wert für den Mondradius ergeben. Das Beispiel illustriert einen Modellfehler, der im zweidimensionalen Modellansatz begründet ist und nicht durch präzise Messungen wettgemacht werden kann.

Angaben zur Mondfinsternis: Ahnerts Astronomisches Jahrbuch 2007.