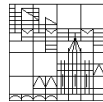


Mathematische Modellierung

„Vermessung der Welt“ – Teil 2



Martin Rheinländer
FB Mathematik & Statistik
Universität Konstanz

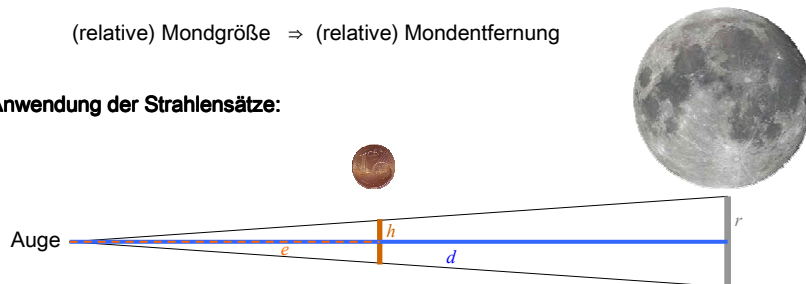
Skript zum 3. Vorlesungstermin (06. Mai 2009)
Vorlesung : Mi 10 – 12, P712, Übung: Mi 8 – 10, P603 (vierzehntägl.)

martin.rheinlaender@uni-konstanz.de
Büro: G414 a, Tel. 88 3648

Entfernung des Mondes mittels Strahlensätze

(relative) Mondgröße $\Rightarrow$ (relative) Mondentfernung

Anwendung der Strahlensätze:



Man halte eine Cent-Münze so vor ein Auge, daß sie die Vollmondscheibe soeben überdeckt (und möglichst senkrecht von der Peillinie *Auge – Mittelpunkt der Mondscheibe* geschnitten wird). Es sei h der Halbmesser des Cent-Stücks und e sein Abstand zum Auge, während d die Entfernung des Mondes zur Erde und r den Mondradius bezeichne. Dann gilt gemäß der Strahlensätze:

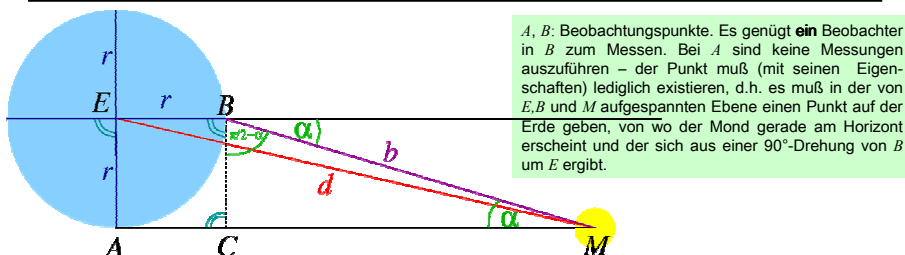
$$\frac{e}{d} = \frac{h}{r} \Leftrightarrow \frac{e}{h} = \frac{d}{r}$$

Auflösen nach d : $d = \frac{e}{h} \cdot r$

Umgekehrt läßt sich bei bekannter Entfernung die Größe schätzen.

Bildquelle (Mond, Cent-Münze): Internet

Abstandsbestimmung Erde-Mond mittels Parallaxenverfahren



A, B : Beobachtungspunkte. Es genügt **ein** Beobachter in B zum Messen. Bei A sind keine Messungen auszuführen – der Punkt muß (mit seinen Eigenschaften) lediglich existieren, d.h. es muß in der von E, B und M aufgespannten Ebene einen Punkt auf der Erde geben, von wo der Mond gerade am Horizont erscheint und der sich aus einer 90° -Drehung von B um E ergibt.

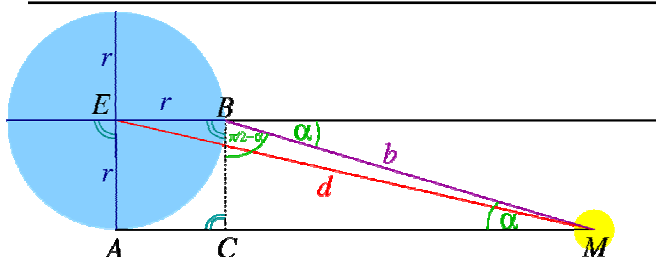
Beschreibung der Konfiguration:

- Wähle Ebene, welche Erd- und Mondmittelpunkt E bzw. M enthält (nicht eindeutig!).
 - Betrachte *Schnittkreis* der Ebene mit Erdkugel.
 - Bestimme Punkt A auf Schnittkreis, so daß Gerade durch A und M Schnittkreis (und damit auch Erdkugel) tangiert.
 - Erhalte Punkt B durch 90° -Drehung (in Schnittebene) von A um Erdmittelpunkt E .
- ⇒ Gerade durch E, B weist zum Zenit bzw. steht $\perp$ auf Erdoberfläche in B .

Beachte: Im Punkt A steht der Mond am Horizont, d.h. er geht entweder gerade auf oder unter.

Parallaxe von griech. παραλλαγή = Veränderung, Wechsel. Scheinbare Änderung der Position eines Objekts vor einem weit entfernten Hintergrund, welche aus einer Positionsänderung des Beobachters resultiert. Eine Parallaxe ergibt sich zum Beispiel, wenn man mit dem rechten oder linken Auge über den Daumen peilt. Es ist zu beachten, daß eine Parallaxe zwischen beliebigen Orten auf der Erdoberfläche besteht, d.h. A und B müßten eigentlich nicht so speziell gewählt werden, wie es hier den Anschein hat. Die Hauptschwierigkeit bei Messungen besteht wohl im Festlegen einer gemeinsamen Bezugs- oder Referenzrichtung an weit auseinanderliegenden Orten. Neben der sogenannten *täglichen Parallaxe* (eignet sich nur für Abstandsbestimmungen innerhalb des Sonnensystems), welche die Ausdehnung der Erde benutzt, verwendet man die *jährliche Parallaxe* (Ausdehnung der Erdbahnumlaufbahn) um die Entfernung „benachbarter“ Sterne vor dem Hintergrund weit entfernter Sterne zu bestimmen. Wurde die Parallaxe schon in der Antike ausgenutzt, oder stammt ihre Anwendung aus der Neuzeit?

Abstandsbestimmung Erde-Mond mittels Parallaxenverfahren (Forts.)



Gesucht: Abstand d zwischen Erdmittelpunkt E und Mondmittelpunkt M .

Rechtwinkliges $\triangle BMC$: $\sin \alpha = r/b \Leftrightarrow b = r/\sin \alpha$

Falls α klein, d.h. $\triangle BMC$ sehr spitz: $d \approx r + b = r + r/\sin \alpha = r(1 + 1/\sin \alpha)$.

Fazit: Kenntnis vom Erdradius r und Winkel α sind ausreichend, um d zu bestimmen.

Exakte Berechnung von d : → Kosinussatz im Dreieck $\triangle EBM$ mit $\angle EBM = \pi - \alpha$.

$$d^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos(\pi - \alpha) \Rightarrow d = \sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \alpha}$$

$$\text{Benutze } b = r/\sin \alpha: \quad d = r \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + 2 \cot \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha}$$

Beachte: $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha$

Anstatt den Kosinussatz im Dreieck $\triangle EBM$ anzuwenden, kann man auch die Seite CM in dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle BCM$ berechnen und sodann das rechtwinklige Dreieck $\triangle EAM$ zur Berechnung von d betrachten. Man überprüfe, daß sich so dasselbe Ergebnis ergibt wie oben.

Analytische Untersuchung: Approximative ↔ exakte Formel

Anschaulich wird durch die Skizze suggeriert:

Je kleiner α desto besser die Näherung $d \approx r(1 + 1/\sin\alpha)$.

Läßt sich dies auch analytisch nachvollziehen?

In welchem Sinne approximiert die Näherung für $\alpha \rightarrow 0$ gegen den exakten Wert?

$$\text{Setze: } D_0(\alpha) := \frac{1}{\sin \alpha}, \quad D_1(\alpha) := \frac{1}{\sin \alpha} (1 + \sin \alpha), \quad D_{\text{ex}}(\alpha) := \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

Es gilt für $\alpha \in (0, \pi/2)$: $rD_0(\alpha) = b < d = rD_{\text{ex}}(\alpha) < rD_1(\alpha)$ (← Näherung)

Beachte: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_{\text{ex}}(\alpha) = \infty$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} D_1(\alpha) = \infty$ **aber** $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha)) = 0$.

Dagegen gilt: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (D_0(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha)) = -1$

Nachrechnen des dritten Grenzwertes → *L'Hospital*:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} (D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha)) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 + \sin \alpha - \sqrt{1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha - \frac{1}{2} (1 + 2 \cos \alpha \sin \alpha + \sin^2 \alpha)^{-1/2} (2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 2}{1} = 0 \end{aligned}$$

Wie schnell nähern sich exakter Wert und Approximation einander an?

Obleich aufgrund der Geometrie anschaulich klar ist, daß die Näherung den exakten Wert in einer sinnvollen Weise approximiert, ist eine analytische Untersuchung aus folgenden Gründen gerechtfertigt: Erstens liefert sie eine formale Rechtfertigung dessen, was intuitiv einleuchtend erscheint. Zweitens ergeben sich Aussagen über die Art der Annäherung (Approximationsgüte), die sich nicht anhand einer Skizze ablesen lassen.

Asymptotische Ähnlichkeit

„Definition:“ D_1 und D_{ex} sind **asymptotisch ähnlich** von der **Ordnung** $s \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, falls eine Konstante $C > 0$ und ein $\alpha_0 > 0$ existieren, so daß für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ gilt:

$$|D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha)| < C \alpha^s.$$

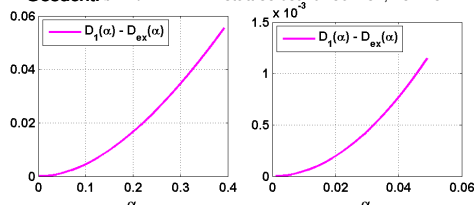
Sprechweise: $D_1 - D_{\text{ex}}$ ist von der Ordnung α^s für α gegen 0.

Kurzschreibweise: $D_1(\alpha) - D_{\text{ex}}(\alpha) = O(\alpha^s)$ für $\alpha \rightarrow 0$

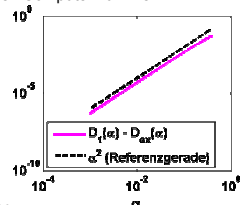
Notation: → Landau Symbole.

s ist ein Maß dafür, wie schnell sich die beiden Funktionen D_1 und D_{ex} „nahe kommen“, wenn α gegen 0 strebt. Je größer s desto schneller.

Gesucht: $s = ?$ → Anstatt selbst zu rechnen, nehmen wir zunächst den Computer zu Hilfe.



Ein Plot der Differenz, zeigt eine Kurve, welche einer (gestauchten) Parabel ähnelt. Ein **Zoom (rechts)** deutet daraufhin, daß die parabelförmige Gestalt der Kurve für $\alpha \rightarrow 0$ bestehen bleibt und die Kurve nicht in eine Gerade übergeht. Dies nährt die **Vermutung** $s = 2$. Daß es sich bei der Kurve wirklich um eine Parabel handelt, läßt sich mit „bloßen Auge“ aber nicht erkennen. Tatsächlich könnte sich eine kubische oder exponentielle Abhängigkeit durch eine sehr ähnliche Kurve manifestieren. Mehr Aufschluß ergibt sich durch eine **doppelt-logarithmische Auftragung** der Differenz.

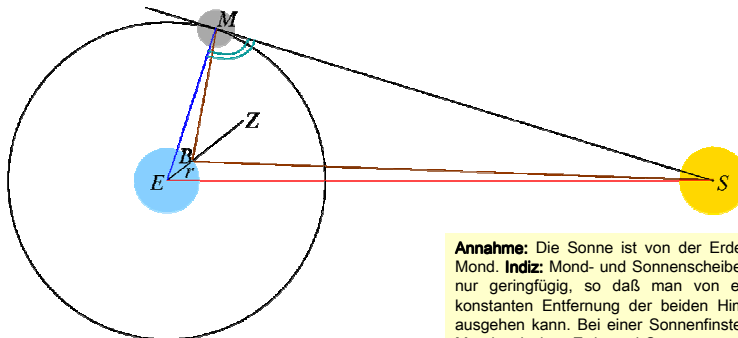


Aufgaben:

- Interpretation der obigen Graphik: Wie begründet sich die Vermutung $s = 2$ anhand dieses Diagramms? Warum ist es deutlich aussagekräftiger als die beiden linken?
- Theoretischer Nachweis, daß $s = 2$.
- Wie ist die Näherung D_1 zu modifizieren (zu verbessern), damit sich $s=3$ ergibt?

Achtung: Der hier definierte Begriff der *asymptotischen Ähnlichkeit* ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der *asymptotischen Äquivalenz*.

Entfernung Erde – Sonne nach *Aristarch von Samos* (310-230 v.Chr.)



Annahme: Die Sonne ist von der Erde weiter weg als der Mond. **Indiz:** Mond- und Sonnenscheibe ändern ihre Größen nur geringfügig, so daß man von einer zeitlich nahezu konstanten Entfernung der beiden Himmelskörper zur Erde ausgehen kann. Bei einer Sonnenfinsternis schiebt sich der Mond zwischen Erde und Sonne, woraus sich die Annahme ergibt.

Beschreibung der Konfiguration:

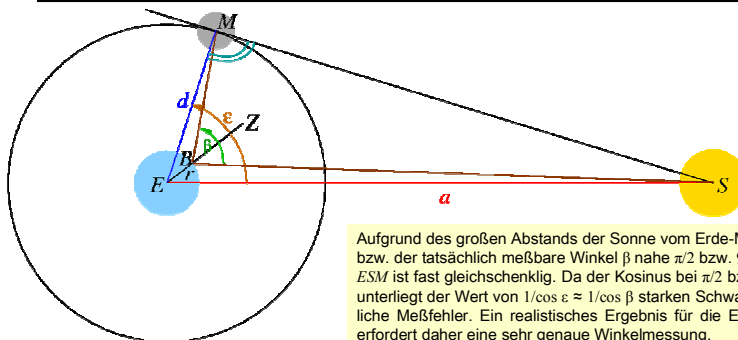
Spezielle Mondstellung: „senkrecht“ zwischen Erde und Sonne, d.h. $\angle EMS = 90^\circ$
Diese Mondstellung liegt (ungefähr) bei Halbmond vor.

Zeichenebene = Ebene durch Erdzentrum E , Mondzentrum M und Sonnenzentrum S .

Wähle Beobachtungspunkt B im Schnitt von Ebene und Erdoberfläche.

Da die Sonnenstrahlen aufgrund der Ausdehnung der Sonne und ihrer endlichen Entfernung leicht gespreizt und nicht exakt parallel verlaufen, ist es nicht möglich, daß sie genau eine Halbkugel bescheinen können. Praktisch wird sich dieser Effekt aber kaum bemerkbar machen. Man beachte, daß vom mathematischen Standpunkt zunächst nur entscheidend ist, daß Erde, Mond und Sonne ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Wie sich diese spezielle Konstellation am Himmel erkennen läßt, ist hier weniger von Interesse.

Entfernung Erde – Sonne nach *Aristarch von Samos*



Aufgrund des großen Abstands der Sonne vom Erde-Mond System liegen ϵ bzw. der tatsächlich meßbare Winkel β nahe $\pi/2$ bzw. 90° , denn das Dreieck ESM ist fast gleichschenkelig. Da der Kosinus bei $\pi/2$ bzw. 90° verschwindet, unterliegt der Wert von $1/\cos \epsilon \approx 1/\cos \beta$ starken Schwankungen durch mögliche Meßfehler. Ein realistisches Ergebnis für die Entfernung der Sonne erfordert daher eine sehr genaue Winkelmessung.

Gesucht: Abstand a zwischen Erdmittelpunkt E und Sonnenmittelpunkt S .

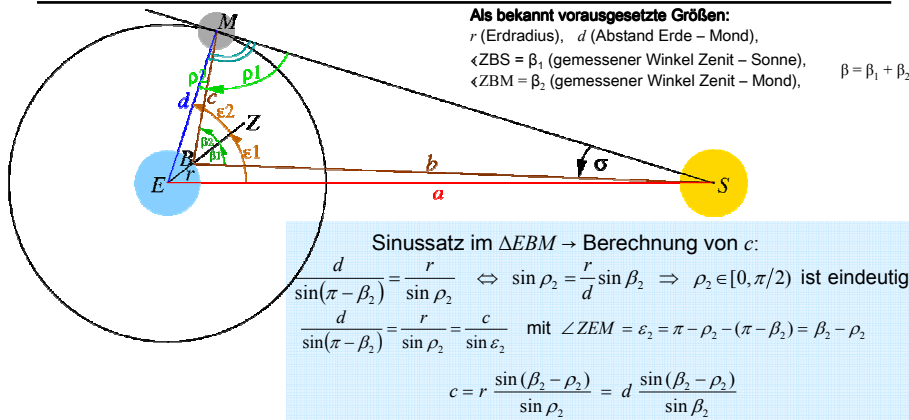
Im rechtwinkligen $\triangle EMS$ gilt: $d = a \cos \epsilon \Leftrightarrow a = d / \cos \epsilon$.

Problem: Winkel $\epsilon = \angle SEM$ kann nicht direkt gemessen werden, da Beobachter in B statt in E steht.

Annahme: $\angle SEM = \epsilon \approx \beta = \angle SBM \Rightarrow a \approx d / \cos \beta$

Die Annahme scheint gerechtfertigt, falls r klein gegenüber der Strecke MS ist, d.h. falls die Punkte E, B dicht beisammen liegen.

Exakte Berechnung des Sonnenabstands a



Sinussatz im $\triangle SBM \rightarrow$ Berechnung von b :

$$\frac{c}{\sin \sigma} = \frac{b}{\sin \rho_1} \quad \text{mit } \rho_1 = \frac{\pi}{2} - \rho_2 \quad \text{und } \sigma = \pi - \beta - \rho_1 = \frac{\pi}{2} - \beta + \rho_2 \Rightarrow b = c \frac{\sin \rho_1}{\sin \sigma} = c \frac{\cos \rho_2}{\cos(\beta - \rho_2)}$$

Kosinussatz im $\triangle ESB$: $a^2 = r^2 + b^2 - 2rb \cos(\pi - \beta_1) = r^2 + b^2 + 2rb \cos \beta_1$

Bemerkungen

Ähnlich wie beim Parallaxenverfahren ließe sich auch hier eine „Konvergenzanalyse“ bzw. eine Analyse zur *asymptotischen Ähnlichkeit* des genäherten Sonnenabstands $a \approx d/\cos \beta$ und des exakten Sonnenabstands $a = d/\cos \epsilon$ durchführen. Dabei wäre der Erdradius bzw. besser dessen Verhältnis zum Mondbahnradius als kleiner Parameter zu betrachten, der gegen 0 zu schicken ist.

Man beachte, daß sich die Näherung hier nicht so leicht graphisch sichtbar machen läßt wie im vorigen Beispiel. Wenn der Sonnenabstand groß im Vergleich zum Mondabstand ist, ist ϵ ein fast rechter Winkel und kommt somit 90° sehr nahe. Da $\beta > \epsilon$ (das Dreieck MBS ist stumpfer als das Dreieck MES), kann es passieren, daß $\beta > 90^\circ$ und $\cos \beta < 0$. In diesem Fall liefert die Näherung einen negativen Wert für a . Erst wenn r hinreichend klein gewählt wird, gilt auch $\beta < 90^\circ$. Es gilt dann ferner $1/\cos \beta > 1/\cos \epsilon$, weshalb die Näherung auf einen zu großen Sonnenabstand führt. Erstaunlicherweise hat Aristarch aber einen deutlich zu geringen Sonnenabstand errechnet, weil er offenbar den Winkel β mit großer Ungenauigkeit gemessen hat und dabei sogar unter dem Wert von ϵ ($< \beta$) gelegen haben muß.

Zur Diskussion: Mit welcher asymptotischen Ordnung approximiert die Näherung den exakten Wert des Sonnenabstands a ?

Resumé

Inwiefern sind die vier Modelle zur Weltvermessung beispielhaft? Welche allgemeingültigen Vorgehensweisen lassen sich daraus für das Modellieren gewinnen?

• **Reduktion der Dimension, z.B.** 3D → 2D oder 2D → 1D. Verschiedene Möglichkeiten:

Ausnutzung **spezieller Symmetrien, besonderer Konstellationen** etc., die eine Beschreibung in der Ebene zulassen. *Beispiele*: Bestimmung von Erdumfang und Sonnenabstand, Parallaxen-verfahren. In allen drei Fällen kann genau begründet werden, warum eine Darstellung in der Ebene „exakt“ ist, d.h. ohne wesentliche vereinfachende Annahmen durchgeführt werden kann. Im Prinzip handelt es sich dabei jeweils um eine **geschickte Wahl des Koordinatensystems**.

• **„Brute force“**. *Beispiel*: Bestimmung der Mondgröße. „Wider besseren Wissens“ wurde zur Vereinfachung ein 2D Modell aufgesetzt. *Beachte*: Zur Bestimmung des Erdumfangs, des Sonnenabstands sowie beim Parallaxenverfahren sind nur **statische** Messungen erforderlich, die jedoch eine spezielle Konfiguration benötigen und von daher ggf. nur zu bestimmten Zeitpunkten durchgeführt werden können. Bei dem Verfahren von Aristarch zur Bestimmung der Mondgröße ist dagegen die **zeitliche Veränderung** bestimmter Größen von Bedeutung.

• Beim **Vergleich von Modellen mit der Realität** ist zwischen **Modellfehlern** und **Meßfehlern** zu unterscheiden. Bei der Methode zur Bestimmung der Mondgröße machen sich vor allem Modellfehler bemerkbar, denn die erforderlichen Messungen lassen sich leicht mit hoher Meßgenauigkeit bewerkstelligen. Bei dem Verfahren zur Ermittlung des Sonnenabstands schlagen dagegen bereits kleine Meßfehler bei der Winkelmessung sehr verfälschend zu Buche. Nicht immer ist eine präzise Modellierung sinnvoll, wenn diese Größe involviert, die nur schwer meßbar sind.

• Die Beispiele illustrieren, wie man eine **kritische Haltung** gegenüber vorgegebenen (Standard-)Modellen einnimmt. Dabei sind insbesondere versteckte, implizite Annahmen zu betrachten, die stillschweigend in die Modellierung miteinfließen. Ferner ist bei der Diskussion eines Modells zunächst zwischen seinem Realitätsbezug und mathematischen Aussagen über das Modell zu unterscheiden.

Aristarch lag mit seinem Ergebnis zur Mondgröße und der daraus abgeleiteten Mondentfernung (durch Anwendung der Strahlensätze) deutlich näher an der Realität (besser gesagt an dem heute akzeptierten mittleren Mondabstand von 384400 km) als mit seiner Schätzung des Sonnenabstands. So berechnete er aufgrund einer fehlerhaften Winkelmessung, daß der Abstand zur Sonne nur das 20-fache vom Abstand zum Mond betrage. Tatsächlich beträgt der Abstand Erde-Sonne aber ca 150 Millionen km und beläuft sich damit auf das knapp 400-fache des Abstands zu unserem Trabanten. Dennoch folgerte Aristarch, daß die Sonne deutlich größer als Mond und Erde sein müsse und infolgedessen auch im Zentrum stehen könnte. Aristarch gelangte auf diese Weise zu einem heliozentrischen Weltbild, welches sich erst vollends im 16. und 17. Jahrhundert aufgrund von Beobachtungen der Planetenbahnen (Tycho Brahe, Kopernikus, Kepler, Galilei) durchsetzen konnte.