Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Definitionen zum Aufgabenblatt 5

Definition 1: Einschrittverfahren
Es sei $D \subset \mathbb{R}^{d+1}$ offen und $f : D \subset \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ eine gegebene, lokal Lipschitz-stetige Funktion (später *Flußfunktion* genannt). Für $(t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^d) \in D$ besitze das Anfangswertproblem

$$x(t_0) = x_0, \qquad \dot{x}(t) = f(t,x) \quad (\star)$$

eine eindeutig bestimmte Lösung in $[t_0, t_0 + T]$ für ein $T > 0$. Betrachte in diesem Intervall eine uniforme Diskretisierung gegeben durch die Gitterknoten $t_n = nh$ mit $h := T/N$, $0 \leq n \leq N$ für beliebiges aber festes $N \in \mathbb{N}$. Ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von x heißt *explizites Einschrittverfahren* mit konstanter Schrittweite h, falls die Näherungswerte $\hat{x} : \{0, 1, ..., N\} \to \mathbb{R}^d$ nach einer Vorschrift vom folgenden Typ berechnet werden:

$$\hat{x}(0) = x_0, \qquad \hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + h\psi\big(t_n, \hat{x}(n), h\big)$$

Dabei ist $\hat{x}(n)$ als Näherung von $x(t_n)$ zu betrachten. $\psi : D \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^d$ ist die *numerische Flußfunktion* bzw. *Verfahrensfunktion*, welche aus der Flußfunktion f konstruiert wird.

Definition 2: Konsistenz
Für gegebenes $(t_0, x_0) \in D$ bezeichne x die Lösung des Anfangswertproblems $(\star)$. Die Größe

$$R(t_0, x_0, h) := h^{-1}\Big(x(t_0 + h) - x_0\Big) - F(t_0, x_0, h)$$

wird als *lokaler Diskretisierungsfehler* bezeichnet (engl. *local truncation error*). Das Einschrittverfahren heißt *konsistent*, falls

$$\lim_{h \downarrow 0} R(t_0, x_0, h) = 0 \qquad \text{gleichmäßig } \forall (t_0, x_0) \in D.$$

Desweiteren sagt man, es habe die *Konsistenzordnung* p, falls eine Konstante $K > 0$ existiert, so daß für alle $(t, x) \in D$ und $h > 0$ gilt:

$$\|R(t, x, h)\| < Kh^p$$

Definition 3: Zentralkraftfeld
Ein Zentralkraftfeld $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ wird durch ein rotationssymmetrisches Vektorfeld beschrieben, d.h. es existiert eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, so daß F folgende Darstellung gestattet:

$$F(x) \;=\; f(\|x\|)\,\tfrac{x}{\|x\|} \qquad \forall x \neq 0$$