



Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Projekt 1

In diesem Projekt soll das **Brachystochronen-Problem**¹ studiert und durch eine numerische Simulation veranschaulicht werden. Die Aufgabenstellung des Problems lautet:

Es seien zwei Punkte A, B in der xy -Ebene fixiert, wobei die y -Koordinate von A größer oder gleich der y -Koordinaten von B ist. Die beiden Punkte sind so durch eine glatte Kurve zu verbinden, daß ein Punktteilchen, welches sich darauf ohne Reibungsverluste unter dem Einfluß eines konstanten, in negative y -Richtung wirkenden Kraftfeldes bewegen kann, in möglichst kurzer Durchlaufungszeit von A nach B gleitet.

Allgemein ist bekannt, daß die gesuchte Kurve durch ein Teilstück eines Zykloidenbogens gegeben ist. Folgende Parametrisierung beschreibt dabei einen (nach oben geöffneten) Zykloidenbogen.

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= r\varphi + r\sin(\varphi) \\y(\varphi) &= r - r\cos(\varphi)\end{aligned}\quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad r > 0$$

Die Größe r wird als Radius des Zykloidenbogens bezeichnet, weil sie dem Radius des Kreises entspricht, der die Zykloide durch Abrollen erzeugt.

- 1) Zeige mit Hilfe der Variationsrechnung, daß das Funktional, welches jeder glatten Verbindungskurve die Durchlaufungszeit zuordnet, für ein Teilstück eines Zykloidenbogens stationär wird.
Man arbeite dazu die entsprechenden Herleitungen in einschlägigen Lehrbüchern (siehe z.B. umseitig) *kritisch* durch. Gegebenenfalls sind Unklarheiten und Verständnisprobleme explizit zu benennen.
- 2) Beweise oder widerlege die Behauptung, daß zwei Punkte in der Ebene auf eindeutige Weise durch ein Teilstück eines Zykloidenbogens verbunden werden können.
- 3) Falls die Behauptung unter 2) nicht stimmt, versuche Zusatzbedingungen zu finden, welche die Eindeutigkeit des Zykloidenbogen-Teilstücks gewährleisten (z.B. minimaler Radius etc.).
- 4) Leite die Bewegungsgleichung für ein Teilchen her, welches sich durch Einwirkung der oben erwähnten Kraft auf einer vorgegebenen, parametrisierten Kurve bewegt².
- 5) (Programmieraufgabe) Falls die Behauptung unter 2) falsch ist, demonstriere dies anhand eines Beispiels und berechne numerisch die Durchlaufungszeiten für die verschiedenen Kurven (bitte mit Visualisierung).
- 6) (Hauptaufgabe zum Programmieren) Bestimme zu frei wählbaren Punkten A, B ein verbindendes Zykloidenbogen-Teilstück. Löse die Bewegungsgleichung für diese Kurve numerisch

¹siehe auch Aufgabe 20 (Blatt 8)

²Vergleiche mit Aufgabe 19, Blatt 8

und visualisiere die Bewegung des Teilchens. Vergleiche die Durchlaufzeit mit dem theoretischen Wert (siehe [1] S. 374). Ferner berechne zum Vergleich auch die Zeit, die ein Teilchen benötigt, das sich auf der Verbindungsgeraden bzw. entlang der “Katheten³” bewegt.

Es sollten mit kurzer Begründung verschiedene numerische Lösungsverfahren ausgewählt und implementiert werden.

Literaturhinweise zum Brachystochronen-Problem:

- [1]: Walter Greiner: Theoretische Physik, Band 2 - Mechanik Teil 2, 5. Auflage 1989, Harri-Deutsch Verlag (Seite 370 ff.)
- [2]: Harro Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen, B.G. Teubner Verlag Stuttgart 1989 (Seite 121 ff.)
- [3]: Harro Heuser: Lehrbuch der Analysis Teil 2, 8. Auflage B.G. Teubner Verlag Stuttgart 1993 (Seite 568 ff.)

³Freier Fall in y -Richtung dann Umsetzung der kinetischen Energie in Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit parallel zur x -Achse