Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 21. Okt., WS 2004/05
Übung: 26. Okt. 10-12h, V203

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1: Warm-up

Um numerische Algorithmen zu testen, empfiehlt es sich, diese anhand bekannter Beispiele (Benchmarks) auszuprobieren. Dazu eignen sich insbesondere Probleme, deren Lösungen anderweitig, z.B. analytisch, zugänglich sind. Dies mag als Motivation zur Beantwortung folgender Fragen dienen:

i) Gib ein *Fundamentalsystem* für die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ an.

$$\ddot{u} + a_1 \dot{u} + a_0 u = 0 \qquad (*)$$

Welche Fälle sind zu unterscheiden ? (Nullstellen des charakteristischen Polynoms)

ii) Wie sieht eine *partikuläre Lösung* von $(*)$ mit der rechten Seite $q(t) = (b_0 + b_1 t)e^{\mu t}$ aus, wobei $b_0, b_1, \mu \in \mathbb{R}$ sind? Welche Fälle können hier je nach Wahl von μ auftreten?

iii) Numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen beziehen sich typischerweise auf Gleichungen bzw. Systeme erster Ordnung. Schreibe daher $(*)$ mit der Inhomogenität q in ein System um. Welche Anfangsbedingungen sind zu stellen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Gib durch spezielle Wahl der Parameter ein konkretes Beispiel samt Lösung an, das sich als sinnvoller Benchmark eignet.

Aufgabe 2: Asymptotik des Euler-Verfahrens

Betrachte das explizites Eulerverfahren (Polygonzugverfahren) für das Anfangswertproblem der linearen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\dot{u} = a(t)u + b(t), \quad u(0) = u_0$$

Vollziehe die Schritte der asymptotischen Analyse nach, wie in der Vorlesung dargestellt, und veranschauliche die Ergebnisse durch ein Beispiel, konkret:

a) Ersetze im Algorithmus mit der Schrittweite h die numerische Lösung $\hat{u}(n)$ durch die formale Entwicklung

$$\hat{u}(n) = v^{(0)}(nh) + hv^{(1)}(nh) + h^2 v^{(2)}(nh) + ... \quad ,$$

wobei die Koeffizientenfunktionen als beliebig glatt vorauszusetzen sind. Mittels welcher Anfangswertprobleme sind die Funktionen $v^{(0)}, v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ zu definieren, um ein Residuum möglichst hoher Ordnung bzgl. h zu erhalten?

b) Gib $v^{(0)}, v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ für den einfachsten Fall ($a = \text{const.}$, $b = 0$) explizit an.

c) Führe für eine spezielle Parameterwahl $(a, T_{\max})$ eine numerische Approximationsanalyse durch. Bestimme dazu für verschiedene Werte der Schrittweite h die folgenden *Abweichungen*:

$$\|\hat{u} - Rv^{(0)}\|$$
$$\|\hat{u} - R(v^{(0)} + hv^{(1)})\|$$
$$\|\hat{u} - R(v^{(0)} + hv^{(1)} + h^2 v^{(2)})\|$$

Zeichne die Ergebnisse in ein doppelt-logarithmisches Diagramm. Was für Kurven sind zu erwarten und welche Approximationsraten ergeben sich daraus?

Bemerkung zur Notation: Bei gegebener, maximal zu erreichender Zeit $T_{\max}$ und gewählter Schrittweite h sehen wir die numerische Lösung $\hat{u} \in \mathcal{F}(\{0, ..., N_{\max}\}, \mathbb{R})$ als eine diskrete Funktion an, welche sich im hiesigen Fall durch ein $(N_{\max} + 1)$-Tupel darstellen läßt. Dabei entspricht $N_{\max}$ der Iterationszahl, d.h. der Anzahl von Iterationen, die maximal durchgeführt werden können, um die Abbruchzeit $T_{\max}$ nicht zu überschreiten. Somit gilt $N_{\max} = [T_{\max}/h]$, wobei $[x]$ mit $x \in \mathbb{R}$ für die größte ganze Zahl steht, die echt kleiner x ist.
$\|\cdot\|$ ist als Maximumsnorm zu interpretieren. Der Restriktionsoperator R schränkt Funktionen auf dem Zeitintervall $[0, T_{\max})$ auf die diskreten Zeitpunkte $0, h, 2h, ..., N_{\max} h$ ein und überführt im vorliegenden Fall $\mathcal{F}([0, T_{\max}), \mathbb{R})$ auf $\mathcal{F}(\{0, ..., N_{\max}\}, \mathbb{R})$.
Beachte, daß bei fester Abbruchzeit $R, \|\cdot\|, \hat{u}$ von h abhängen. Der Übersichtlichkeit halber wird dies jedoch nicht besonders durch die Notation hervorgehoben (z.B. $\hat{u}_h$ statt $\hat{u}$).