Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 11. Nov., WS 2004/05
Übung: 17. Nov. 10-12h, V203

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 4

Aufgabe 8: Explizites versus implizites Euler-Verfahren

Wir betrachten für den harmonischen Oszillator (siehe Aufgabe 4, Blatt 2) das *implizite Euler-Verfahren*, welches durch folgende Rekursionsformel gegeben ist:

$$\hat{y}(0) = y_0, \qquad \hat{y}(n+1) = \hat{y}(n) + hA\hat{y}(n+1) \qquad (*)$$

a) Begründe, warum man $(*)$ auch als *Rückwärtsverfahren* bezeichnet, während das explizite Euler-Verfahren *Vorwärtsverfahren* genannt wird.

b) Vergleiche den "Output" des impliziten Euler-Verfahrens $\hat{y}$ mit der exakten Lösung.

c) $\hat{x}$ entspreche dem Ergebnis des expliziten Eulerverfahrens. Beweise für $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^2$ und fester Schrittweite h:

$$\text{i)} \quad \lim_{n\to\infty} \hat{x}(n) = \infty \qquad\qquad \text{ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \hat{y}(n) = 0$$

Ein numerisches Verfahren heißt *absolut stabil*, falls ii) für die numerische Lösung gilt.

d) Betrachte nun ein beliebiges lineares Differentialgleichungssystem mit konstanter Koeffizientenmatrix $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{C}^n, \qquad \dot{y} = My$$

Finde für das explizite bzw. implizite Eulerverfahren hinreichende und notwendige Bedingungen an die Matrix M, welche die absolute Stabilität sicherstellen.
Inwiefern verhalten sich die beiden Verfahren komplementär zueinander und inwieweit ist das Verhalten der diskreten Schemata qualitativ abweichend vom Verhalten der kontinuierlichen Gleichung?

Aufgabe 9: Konvergenz und Asymptotik des impliziten Euler-Verfahrens

Im folgenden betrachten wir das implizite Euler-Verfahren für ein lineares Differentialgleichungssystem mit konstanter Koeffizientenmatrix.

a) Führe die auf der regulären Entwicklung basierende asymptotische Analyse durch. Bestimme die Koeffizientenfunktionen so, daß das Residuum mindestens von der Ordnung $\mathcal{O}(h^3)$ ist. Wie sieht das Residuum aus?
Macht es einen Unterschied, ob man das implizite Euler-Verfahren in der Form von Gleichung $(*)$ oder in der nach $\hat{y}(n)$ aufgelösten Darstellung entwickelt?

b) Was haben die aus der Analysis 1 bekannten Formeln

$$\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{x}{n})^n \; = \; e^x \; = \; \lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{x}{n})^{-n}$$

mit den Euler-Verfahren zu tun? Verallgemeinere die Beziehungen für Matrizen und beweise sie.

c) Zeige, daß das implizite Euler-Verfahren stabil ist und beweise somit die Konvergenz bzw. die Gültigkeit der asymptotischen Entwicklung auf kompakten Zeitintervallen.

d) Führe die Zweiskalenentwicklung analog zur Vorlesung durch. Läßt sich das absolute Stabilitätsverhalten auch ohne Untersuchung der Iterationsmatrix vorhersagen?

Aufgabe 10: Das mathematische Pendel

Im folgenden betrachten wir einen (masselosen) Stab der Länge l, welcher an einer Achse befestigt ist, um die er sich reibungsfrei und vollständig drehen kann. Am anderen Ende des Stabes befinde sich eine Punktmasse m, die sich unter dem Einfluß des homogen gedachten Schwerefeldes der Erde mit der Fallbeschleunigung g bewegt.

a) Bezeichne θ den Winkel zwischem dem Stab und der Vertikalen gegeben durch die Richtung des Erdschwerefeldes. Begründe, weshalb die Bewegung des Pendels durch die Gleichung

$$\ddot{\theta} + k^2 \sin(\theta) = 0 \quad (\star) \qquad \text{mit} \quad k := \sqrt{\frac{g}{l}}$$

beschrieben wird.

b) Zeige, daß alle Lösungen der Gleichung $(\star)$ global existieren. Beweise die Existenz von periodischen Lösungen bei geeigneten Anfangsbedingungen.

c) Wähle Anfangsdaten, welche zu einer periodischen Lösung gehören und löse das Anfangswertproblem numerisch mit Verfahren unterschiedlicher Ordnung.

   i) Vergleiche bei fest gewähltem Verfahren die numerischen Lösungen für unterschiedliche Schrittweiten und bestimme so die Konvergenzrate.

   ii) Vergleiche bei fest gewählter Schrittweite die numerischen Lösungen der beiden Verfahren.

   iii) Vergleiche für verschiedene Anfangsbedingungen die numerische Lösung von $(\star)$ mit der des harmonischen Oszillators.