Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 18. Nov., WS 2004/05
Übung: 23. Nov. 10-12h, V203

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 5

Aufgabe 11: Konsistenz von Einschrittverfahren

a) Zeige, daß das Einschrittverfahren genau dann *konsistent* ist, wenn die numerische Flußfunktion ψ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\lim_{h \downarrow 0} \psi(t,x,h) = f(t,x) \qquad \text{gleichmäßig } \forall (t,x) \in D.$$

b) Bestimme die Konsistenzordnungen des Heunschen und des modifizierten Euler Verfahrens für eine beliebig oft differenzierbare Flußfunktion f.

$$\begin{aligned} \text{Heun} \quad : \quad \psi(t,x,h) &= \tfrac{1}{2}\Big[f(t,x) + f\big(t+h, x+hf(t,x)\big)\Big] \\ \text{mod. Euler} : \quad \psi(t,x,h) &= f\big(t+\tfrac{h}{2}, x+\tfrac{h}{2}f(t,x)\big) \end{aligned}$$

Für Masochisten: Selbige Aufgabe für das klassische Runge-Kutta Verfahren.

c) Begründe, weshalb das modifizierte Euler-Verfahren die Differentialgleichung $\dot{x} = t$ exakt löst.

Aufgabe 12: Ordnung ist nicht alles!

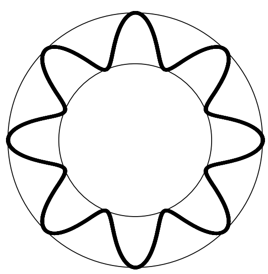
Betrachte das folgende Anfangswertproblem

$$x(0) = 1, \qquad \dot{x}(t) = |1.1 - x(t)| + 1 \quad t \in [0,T] \qquad \text{für } T \geq 0.1.$$

i) Berechne die analytische Lösung.

ii) Löse das Anfangswertproblem numerisch und stelle den Fehler für mehrere Verfahren als Funktion der Schrittweite in einem doppelt logarithmischen Diagramm dar. Welche Beobachtung ergibt sich?

Aufgabe 13: Seltsame Planetenorbits



In einem Science-Fiction wird davon berichtet, daß es in einer entfernten Galaxie Sonnensysteme mit Planeten gibt, auf denen Sommer und Winter auf beiden Halbkugeln gleichzeitig und nicht wie bei uns versetzt stattfinden. Außerdem gibt es kein Sommer- bzw. Winterhalbjahr, sondern auf einen Sommermonat folgt ein Wintermonat und umgekehrt. Insgesamt gibt es acht Sommer- bzw. Wintermonate pro Jahr.

Die beschriebenen Phänomene sind leicht erklärbar, wenn man annimmt, daß sich die Planeten auf rosettenförmigen Umlaufbahnen befinden, wie oben abgebildet. Die Jahreszeiten werden dann im wesentlichen nicht durch eine Neigung ihrer Rotationsachse zu ihrer Ekliptik (Umlaufebene) hervorgerufen, sondern durch einen stark variierenden Abstand von ihrem sonnenähnlichen Zentralgestirn.

Komme den mysteriösen Kräften auf die Spur, die diese eigenartigen Umlaufbahnen erzwingen. Zeige, daß solche Planetenbahnen in bestimmten Zentralkraftfeldern möglich sind und führe zur Untermauerung und Illustration numerische Simulationen durch.

Vorgehensvorschlag:

a) Wie könnte eine möglichst einfache Beschreibung in Polarkoordinaten einer solchen Umlaufbahn mit oszillierendem Abstand zum Zentralgestirn (Koordinatenursprung) aussehen. Gib den Abstand r vom Ursprung als Funktion des Azimutalwinkels φ an.

b) Physikalischer Teil: Leite unter Verwendung des Energie- und Drehimpulserhaltungssatzes die folgende *Bahngleichung*

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{1}{u^2l^2} f\left(\frac{1}{u}\right)$$

für den inversen Abstand $u = \frac{1}{r}$ als Funktion des Azimuts φ her. Die Masse des Planeten sei auf 1 normiert und l entspreche dem konstanten Drehimpuls.
Beachte: $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ und $r^2\frac{d\varphi}{dt} = l = const.$

c) Setze den Ansatz aus a) in die Bahngleichung ein und bestimme so das Zentralkraftfeld. Inwiefern unterscheidet sich dieses qualitativ vom Newtonschen Gravitationsgesetz.

d) Löse die Bahngleichung mit dem gefundenen f numerisch und demonstriere so, daß man die "eingesetzte Bahn" zurückerhält. Wähle verschiedene spezielle Bahnen. Welche numerischen Schwierigkeiten ergeben sich bei stark oszillierenden Bahnen mit lokal großen Krümmungen?

e) Zeige abschließend, daß die postulierten Bahnen tatsächlich in dem durch f definierten Zentralkraftfeld realisiert werden können, wenn die Anfangsbedingungen für die Planeten geeignet gewählt werden. Simuliere dazu die Bewegungsgleichung der Planeten in dem Zentralkraftfeld.

Bemerkung: Die Bewegungsgleichung erlaubt keine analytische Vergleichslösung, da sich die zeitliche Abhängigkeit nicht mehr explizit analytisch berechnen läßt. Dennoch können wir die erhaltene Bahn mit der postulierten Bahn vergleichen. Beachte, daß wir mittels der Numerik die (unterschiedliche) Dauer von Sommer- und Wintermonaten berechnen können, die alternativ mit dem Keplerschen Flächensatz abgeschätzt werden kann.