Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 20. Jan., WS 2004/05
Übung: 25. Jan. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 10

Aufgabe 23: Implizite Verfahren mit Newton Algorithmus

Implizite Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen erfordern im allgemeinen das Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme.
Löse das folgende Anfangswertproblem für die Van-der-Pol Gleichung

$$u(0) = 2, \qquad \dot{u}(0) = 0, \qquad \mu = 1000$$
$$\ddot{u}(t) = \mu\left(1 - u^2(t)\right)\dot{u}(t) - u(t) \qquad t \in [0, 10]$$

(siehe Blatt 3, Aufgabe 7) numerisch mittels der beiden folgenden Verfahren:

i) implizites Eulerverfahren: $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$

ii) implizite Mittelpunktsregel: $x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{1}{2}h,\ \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1})$

Die sich ergebenden nichtlinearen Gleichungssysteme löse man mit Hilfe des

Newton Algorithmus: Gegeben ist eine stetig differenzierbare Funktion $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Die Lösung der Gleichung $F(\bar{x}) = 0$ kann nach Wahl eines "geeigneten" Startwertes $x_0 \in \Omega$ durch folgende Iteration approximativ berechnet werden.

$$x_{n+1} = x_n - \left(DF(x_n)\right)^{-1} F(x_n)$$

Hierbei bezeichnet DF die Jacobi-Matrix. Es wird vorausgesetzt, daß $DF(\bar{x})$ invertierbar ist.