Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 27. Jan., WS 2004/05
Übung: 1. Feb. 10-12h, C421

# Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
## Aufgabenblatt 11

### Aufgabe 24: Stabilitätsfunktion des Merson-Verfahrens

Bestimme die Stabilitätsfunktion des Merson-Verfahrens mit dem folgenden Butcher-Schema:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
. & . & . & . & . & . \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & . & . & . & . \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & . & . & . \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & . & \frac{3}{8} & . & . \\
1 & \frac{1}{2} & . & -\frac{3}{2} & 2 & . \\
\hline
 & \frac{1}{6} & . & . & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

Zur Definition der Stabilitätsfunktion siehe Aufgabe 14, Blatt 6.

### Aufgabe 25: Ein Stabilitätssatz

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Die Funktion $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ genüge der folgenden Ungleichung

$$(*) \qquad \langle f(t,y) - f(t,z), y - z \rangle \leq \lambda \|y - z\|_2^2 \qquad \text{für alle } (t,y),(t,z) \in I \times \Omega \,,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Ferner seien $u, v : [0,T) \subset I \to \Omega$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $\dot{w} = f(t,w)$ zu den Anfangswerten $u_0, v_0 \in \Omega$. Beweise, daß dann die folgende Abschätzung besteht.

$$\|u(t) - v(t)\|_2 \leq e^{\lambda t} \|u_0 - v_0\|_2$$

**Hinweis:** Betrachte die Funktion $\phi(t) := \|u(t) - v(t)\|_2^2$ und schätze zunächst ihre Ableitung ab.

**Bemerkung:** Die Bedingung $(*)$ wird als *schwache Lipschitzbedingung* oder *Monotoniebedingung* bezeichnet. Beachte, daß im Gegensatz zur (starken) Lipschitzbedingung auch negative Werte für $\lambda$ erlaubt sind. Im Falle $\lambda < 0$ spricht man von einer *dissipativen* Differentialgleichung. Warum? Was wird dissipiert ("zerstreut")?

### Aufgabe 26: Testfragen

1) Wie heißen die Runge-Kutta-Verfahren, die durch die nachstehenden Butcher-Schemata definiert sind (mit Begründung)?

i) $\begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & 1 \end{array}$ ii) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

2) Wie sehen die zugehörigen Stabilitätsbereiche aus?

3) Wie heißt die folgende gebrochen lineare Transformation?

$$C(z) = \frac{1 + z/2}{1 - z/2}$$

Wie gut approximiert $C(z)$ die Exponentialfunktion $e^z$? Es sei $A$ eine schiefsymmetrische Matrix, d.h. $A^\top = -A$. Welche Eigenschaft besitzt die Matrix $C(A)$? Zur Definition von $C(A)$ siehe Aufgabe 22, Blatt 9.

4) Warum ist die Stabilitätsfunktion eines $s$-stufigen, expliziten Runge-Kutta-Verfahrens der Konvergenzordnung $s$ durch die abgebrochene Exponentialreihe bis einschließlich zum $s$'ten Term gegeben? Was kann man über die Stabilitätsfunktion sagen, falls die Konvergenzordnung nicht $s$ sondern $k$ ist mit $k \leq s$?