Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 3. Feb., WS 2004/05
Übung: 8. Feb. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 12

Aufgabe 27: Grenzwert exponentiell stabiler Lösungen

Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei lokal Lipschitz-stetig und genüge mit der Konstanten $\alpha > 0$ der *Monotoniebedingung*

$$\big\langle f(x) - f(y), x - y \big\rangle \;\leq\; -\alpha \|x - y\|_2^2 \,.$$

Es sei $x \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \dot{x}(t) = f(x(t)) \quad t \geq 0$$

Nach Aufgabe 25 (Blatt 11) ist die Lösung *exponentiell stabil*, d.h.: Sei $z \in C^1([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ die Lösung des *gestörten* Anfangswertproblems mit $z(0) = x_0 + \delta x_0$, so besteht die Abschätzung

$$\|x(t) - z(t)\|_2 \leq e^{-\alpha t} \|\delta x_0\|_2 \,.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) x ist auf jedem kompakten Zeitintervall $[0, T]$ beschränkt.

b) Es existiert ein $x_\infty \in \mathbb{R}^n$ und eine Konstante $K > 0$, so daß gilt:

   i) $f(x_\infty) = 0$ ii) $\|x(t) - x_\infty\|_2 \leq K e^{-\alpha t}$

   x_∞ wird als *stationäre (Gleichgewichts)lösung* bezeichnet.

Hinweis: Beweise zunächst die gleichmäßige Stetigkeit von x sowie die Existenz des Limes $\lim\limits_{n\to\infty} x(t + nh)$ und seine Unabhängigkeit von h bzw. t.

Aufgabe 28: Durchführbarkeit des Impliziten Euler-Verfahrens

Das implizite Euler-Verfahren für die Differentialgleichung $\dot{u}(t) = f(t, u(t))$ ist bekanntlich durch die folgende Rekursionsgleichung

$$u_{n+1} \;=\; u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$$

mit der Schrittweite h gegeben. Hierbei sei $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig bezüglich des zweiten Arguments. Somit ist für jeden Zeitschritt eine nichtlineare Gleichung vom Typ

$$x = y + hf(t, x)$$

nach x aufzulösen, wobei y, t und h als Parameter fungieren. Zeige, daß diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt, falls f mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ einer *Monotoniebedingung* genügt und $h\lambda < 1$ ist. Welche Schrittweitenbeschränkung ergibt sich für dissipative Differentialgleichungen?
Hinweis: Finde eine geeignete Differentialgleichung mit asymptotisch stabilen Lösungen und bestimme u_{n+1} bzw. x als stationäre Gleichgewichtslösung; verwende dazu Aufgabe 27.

Aufgabe 29: Zu den Stabilitätsfunktionen impliziter Einschrittverfahren

Es R eine rationale Funktion, welche keine Polstellen in der linken Halbebene $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \le 0\}$ besitzt.

0) (Vorüberlegung) Beweise die folgende Behauptung.

$$\begin{array}{rl} \text{Entweder:} & \forall\, M > 0,\ \exists\, r > 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}^- \text{ mit } |z| > r\ :\quad |R(z)| > M \\ \text{oder:} & \exists\, q \in \mathbb{C},\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, r > 0,\ \forall\, z \in \mathbb{C}^- \text{ mit } |z| > r\ :\quad |R(z) - q| < \epsilon \end{array}$$

a) Zeige mit Hilfe des Maximumsprinzips für komplex differenzierbare Funktionen, daß der Stabilitätsbereich von R die linke Halbebene umfaßt, falls

$$|R(iy)| \le 1 \quad \text{für alle} \quad y \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

b) Wenn die rationale Funktion $R = P/Q$ der Bedingung $(*)$ genügt, welche (äquivalente) Bedingung erfüllt dann das Polynom E mit $E(y) = Q(iy)Q(-iy) - P(iy)P(-iy)$?

c) Es sei $R(z)$ eine Approximation der Exponentialfunktion der Ordnung $p \in \mathbb{N}$, d.h. es gelte $|R(z) - \exp(z)| = \mathcal{O}(z^{p+1})$ für $z \to 0$. Zeige, daß dies $E(y) = \mathcal{O}(y^{p+1})$ für $y \to 0$ impliziert.

Ergänzungsaufgabe: Probleme mit der Van-der-Pol Gleichung

Bei geeignet gewählten Gleichungsparametern bereitet die numerische Lösung der Van-der-Pol Gleichung sowohl bei der Verwendung expliziter wie impliziter Einschrittverfahren mit fester Schrittweite h erhebliche Probleme. Läßt sich dieses Verhalten verstehen?

Man bestimme dazu an ausgewählten Stellen eine Linearisierung der Systemfunktion und berechne die Eigenwerte λ_1, λ_2 der Jacobimatrix. Wie muß die Schrittweite h gewählt werden, damit $h\lambda_{1,2}$ im Stabilitätsbereich liegt und die Durchführbarkeitsbedingung für das implizite Euler-Verfahren (Aufgabe 28) erfüllt ist?