Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dipl.-Phys. M. Rheinländer

Ausgabe: 10. Feb., WS 2004/05
Übung: 15. Feb. 10-12h, C421

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
Aufgabenblatt 13

Aufgabe 30: Analyse eines Rosenbrock-Verfahrens

Betrachte das folgende zwei-stufige, linear implizite Verfahren (Rosenbrock-Verfahren):

$$\begin{aligned}(I - ahJ)k_1 &= f(t_i, u_i)\\ (I - ahJ)k_2 &= f(t_i + \tfrac{1}{2}h, u_i + h\tfrac{1}{2}k_1) - ahJk_1\\ u_{i+1} &= u_i + hk_2\end{aligned}$$

Dabei ist $a := (2 + \sqrt{2})^{-1}$, J die Jacobi-Matrix von f bezüglich des zweiten Arguments, also $J := D_u f(t_i, u_i)$ und I die Einheitsmatrix.

a) Gib eine hinreichende Bedingung für die Schrittweite h an, so daß die Gleichung vom Typ $(I - ahJ)k = g$ nach k aufgelöst werden kann und die Abschätzung $\|k\| \leq 2\|g\|$ besteht.

b) Zeige, daß das Verfahren die Konsistenzordnung 2 besitzt, falls $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mindestens zweimal stetig differenzierbar ist.
Zur Erinnerung: Es sei u eine Lösung der zugrunde liegenden Differentialgleichung. Setze $u_i = u(t)$ und vergleiche u_{i+1} mit $u(t + h)$. Von welcher Ordnung bezüglich h ist die Abweichung zwischen u_{i+1} und $u(t + h)$, falls u mindestens dreimal stetig differenzierbar ist?

Wie wird die Konsistenzordnung beeinflußt, wenn J nicht der (exakten) Jacobi-Matrix entspricht?

c) Zeige, daß die Stabilitätsfunktion des Rosenbrock-Verfahrens gegeben ist durch

$$R(z) = \frac{1 + (1 - 2a)z}{(1 - az)^2} = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + (\tfrac{1}{2} - a)z^3 + \mathcal{O}(z^4).$$

d) Beweise, daß das Rosenbrock-Verfahren *A-stabil* ist, d.h. $|R(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$.
Tip: Aufgabe 29a, Blatt 12.

Aufgabe 31: Reversibilität rationaler Matrixfunktionen (zur Ergänzung)

1) Zeige, daß für eine rationale Funktion R mit rellen Koeffizienten (beachte $\overline{R(z)} = R(\bar{z})$!), welche keine Polstellen in in der abgeschlossenen linken Halbebene $\mathbb{C}^-$ besitzt, die nachstehenden Eigenschaften äquivalent sind.

i) $|R(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$.

ii) $|R(iy)| = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$.

iii) $R(z)R(-z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\text{Polstellen von } R\}$ (Reversibilitätsbedingung).

2) Beweise, daß schiefsymmetrische Matrizen ein rein imaginäres Spektrum besitzen.
3) Warum ist $R(A)$ für eine schiefsymmetrische Matrix A erklärt? Zeige, daß $R(A)$ orthogonal ist.

Hinweise: Beachte Aufgabe 22 (Blatt 9), Aufgabe 26.3 (Blatt 11) und Aufgabe 29a (Blatt 12).
Ad 1) ii)$\Rightarrow$ iii): Man zeige die Gültigkeit der Reversibilitätsbedingung auf der imaginären Achse und erinnere sich dann an den Identitätssatz für holomorphe Funktionen.

Aufgabe 32: Gaußsche-Quadraturformel (zur Wiederholung)

Auf der Menge der stetigen Funktionen über dem Intervall $[a, b]$ betrachten wir das Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, r(x)\, dx \qquad \text{für } f, g \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

Dabei ist $r : [a, b] \to [0, \infty]$ eine positive, integrierbare Funktion, welche in endlich vielen Punkten auch die Werte 0 bzw. ∞ annehmen darf. Mittels des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens läßt sich ausgehend von der Einsfunktion $\mathbf{1}$ (konstant 1 auf $[a, b]$) eine orthogonale Basis in $\Pi_n := \operatorname{span}\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ erzeugen. Die so erhaltenen, paarweise orthogonalen Polynome seien mit $p_0, p_1, ...$ bezeichnet. Es gilt $\deg p_k = k$.
Es seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden und $\rho_1, ..., \rho_n \in \mathbb{R}$ beliebig. Ferner bezeichnen wir mit $L_1, ..., L_n$ die Lagrangeschen Polynome definiert durch $\deg L_i = n - 1$ und $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, ..., n\}$.

Zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Für alle $p \in \Pi_{2n-1}$ gilt: $\langle p, \mathbf{1}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \rho_k\, p(\lambda_k)$

ii) $\begin{cases} \text{a) } \lambda_1, ..., \lambda_n \text{ sind die Nullstellen des } n\text{'ten orthogonalen Polynoms } p_n. \\ \text{b) Für } k = 1, ..., n \text{ ist die } k\text{'te Gewichtszahl gegeben durch } \rho_k = \langle L_k, \mathbf{1}\rangle = \langle L_k, L_k\rangle > 0. \end{cases}$

Konsultiere ggf. ein Standardlehrbuch der Numerik.

Aufgabe 33: Diskrete Energieerhaltung

Implementiere zur numerischen Lösung des harmonischen Oszillators ein Gauß-Verfahren (z.B. die implizite Mittelpunktsregel) und überprüfe, ob die Gesamtenergie des Systems (bis auf Rundungsfehler) erhalten bleibt. Vergleiche daß Gauß-Verfahren mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren von gleicher Ordnung.
Zur Erinnerung: Der harmonische Oszillator wird im Phasenraum durch das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p \\ \dot{p} &= -k\, x \qquad k > 0 \end{aligned}$$

beschrieben. Man prüft leicht nach, daß die Gesamtenergie $E := \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}kx^2$ eine Erhaltungsgröße des Systems darstellt.

Geschafft !! ;-)