Universität Konstanz
FB Mathematik & Statistik
Prof. Dr. M. Junk
Dr. M. Rheinländer

Ausgabe: 28. Apr., SS08

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1.1: Konvergenzanalyse des Euler Verfahrens

Das in der Vorlesung entwickelte Verkehrsmodell reduziert sich im Fall $N = 2, x_2(t) = \ell$ auf eine skalare Gleichung zweiter Ordnung für die Position x_1 des nachfolgenden Fahrzeugs mit $x_1(0) < 0$

$$\ddot{x}_1 + c\alpha\dot{x}_1 + cx_1 = 0, \tag{1}$$

welche auch als gedämpfte Schwingungsgleichung bekannt ist. Als System erhält man:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & -c\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems.

b) Spezifizieren Sie das qualitative Verhalten (Oszillation; Kriechfall, Dämpfung) der Lösung in Abhängigkeit von der Parameterwahl.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem auch numerisch unter Verwendung des Euler-Verfahrens. Führen Sie mit Hilfe der in a) ermittelten exakten Lösung eine Konvergenzstudie durch.

d) (freiwillig) Implementieren Sie das in der Vorlesung vorgestellte System zur Simulation eines Verkehrsablaufs.

Aufgabe 1.2: Das mathematische Pendel

Die Auslenkung x des Fadenpendels als Funktion der Zeit wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + k^2 \sin(x) = 0 \tag{3}$$

beschrieben. Bezeichnet ℓ die Länge des Pendels und g die lokale Erdbeschleunigung (ungefähr 10ms^{-2}), so ist die Konstante k durch $k = \sqrt{g/\ell}$ gegeben.

a) Begründen Sie, warum jedes Anfangswertproblem (AWP) für die *nichtlineare* Differentialgeichung (3) eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ erlaubt.

b) Wie sieht die zeitliche Änderung der Größe $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + k^2\big(1 - \cos(x)\big)$ aus, wenn x eine Lösung von (3) ist. Geben Sie eine Formel zur Berechnung die Periodendauer (Zeit, welche das Pendel benötigt um eine Schwingung durchzuführen) an.

c) Unter welchen Umständen besitzt das AWP *periodische* Lösungen. Beweisen Sie Ihre Aussage.

d) Simulieren Sie das mathematische Pendel mittels eines selbstgeschriebenen MATLAB Programms. Verwenden Sie *explizite Runge-Kutta Verfahren* zur numerischen Lösung des AWPs und visualisieren Sie ihr Ergebnis.

   Wie hängt die Periodendauer von k und der Maximalauslenkung ab? Führen Sie einen Simulationsvergleich mit der ungedämpften Schwingungsgleichung $\ddot{x} + k^2x = 0$ durch (siehe Aufgabe 1.1).